Chapitre 8 : Factorisation et résolution

[1 Isoler une variable dans un calcul 2](#_Toc157936113)

[2 Distributivité 2](#_Toc157936114)

[2.1 Utiliser la distributivité pour faire un développement 2](#_Toc157936115)

[2.2 Utiliser la distributivité pour faire une factorisation 3](#_Toc157936116)

[3 Identités remarquables 4](#_Toc157936117)

[3.1 Une somme au carré 4](#_Toc157936118)

[3.2 Une différence au carré 4](#_Toc157936119)

[3.3 Une différence de deux carrés 5](#_Toc157936120)

[4 Equation « produit nul » 5](#_Toc157936121)

[5 Simplifier des quotients 6](#_Toc157936122)

[6 Equation « quotient nul » 7](#_Toc157936123)

[7 Inéquation produit et inéquation quotient 8](#_Toc157936124)

Chapitre 8 : Factorisation et résolution

# Isoler une variable dans un calcul

Il s’agit d’exprimer une grandeur en fonction des autres afin de la calculer.

**Exemple :** On sait que le volume $V$ d’un cône se calcule en fonction du rayon $R$ de sa base et de sa hauteur $h$.

$$V=\frac{1}{3}πR^{2}h$$

Mais il est aussi possible, en partant de cette formule, d’exprimer le rayon $R$ en fonction de $V$ et de $h$ :

$$R^{2}=\frac{V}{\frac{1}{3}πh}$$

D’où la nouvelle formule :

$$R=\sqrt{\frac{V}{\frac{1}{3}πh}}$$

Si l’énoncé précise que le volume du cône est $V=0,2 L$ et la hauteur est $h=15 cm$ alors on peut calculer le rayon de la base :

Pour avoir la cohérence des unités, on met tout en $cm$.

On sait que $1 L=1000 cm^{3}$ donc $V=200 cm^{3}$

$$R=\sqrt{\frac{200}{\frac{1}{3}π×15}}$$

$$R=\sqrt{\frac{200}{5π}}≈3,57 cm$$

# Distributivité

## Utiliser la distributivité pour faire un développement

Développer un produit de facteurs consiste à le transformer en somme (ou différence) de termes.

* Distributivité simple.

$a\left(b+c\right)=ab+ac $ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels.

**Exemple :** Développer $A=2x(x-7)$.

*Réponse*

$$A=2x×x+2x×-7$$

$$A=2x^{2}-14x$$

* Distributivité double.

$\left(a+b\right)\left(c+d\right)=ac+ad+bc+bd $ où $a$, $b, c$ et $d$ sont des réels.

**Exemple :** Développer $A=(5-2x)(x+8)$.

*Réponse*

$$A=5x+40-2x^{2}-16x$$

$$A=-2x^{2}-11x+40$$

Remarque :

On regroupe les puissances de $x $identiques et on écrit le résultat dans l’ordre des puissances de $x$ décroissantes.

## Utiliser la distributivité pour faire une factorisation

Factoriser une somme (ou différence) de termes consiste à la transformer en produit de facteurs.

* Distributivité simple.

$a\left(b+c\right)=ab+ac $ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels.

**Exemple 1 :** Factoriser $B=2x\left(x-7\right)+2x(5x-3)$.

*Réponse*

On remarque le facteur commun $2x$ dans les deux termes de la somme. On peut donc le factoriser :

$$B=2x\left(\left(x-7\right)+(5x-3)\right)$$

Puis on simplifie :

$$B=2x(x-7+5x-3)$$

$$B=2x(x+5x-7-3)$$

$$B=2x\left(6x-10\right)$$

**Exemple 2 :** Factoriser $C=(2x-3)\left(x-7\right)+(2x-3)(5x-3)$.

*Réponse*

On remarque le facteur commun $2x-3$ dans les deux termes de la somme. On peut donc le factoriser :

$$C=(2x-3)\left(\left(x-7\right)+(5x-3)\right)$$

Puis on simplifie :

$$C=(2x-3)(x-7+5x-3)$$

$$B=(2x-3)(x+5x-7-3)$$

$$B=(2x-3)\left(6x-10\right)$$

# Identités remarquables

Trois identités remarquables sont à connaitre.

## Une somme au carré

Pour tous réels $a$ et $b$ on a :

$$\left(a+b\right)^{2}=(a+b)(a+b)$$

$$\left(a+b\right)^{2}=aa+ab+ba+bb$$

$$\left(a+b\right)^{2}=a^{2}+ab+ba+b^{2}$$

$$\left(a+b\right)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$$

**Exemple :** Factoriser $A=4x^{2}+12x+9$

*Réponse*

On remarque que $4x^{2}=\left(2x\right)^{2}$ et que $9=3^{2}$.

Il se peut donc que $A=a^{2}+2ab+b^{2}$ avec $\left\{\begin{matrix}a=2x\\b=3\end{matrix}\right.$

$2ab$ donne bien $2ab=2×2x×3=12x$.

$4x^{2}+12x+9=\left(2x\right)^{2}+2\left(2x\right)\left(3\right)+\left(3\right)^{2}$

Donc :

$$A=\left(2x+3\right)^{2}$$

## Une différence au carré

Pour tous réels $a$ et $b$ on a :

$$\left(a-b\right)^{2}=(a-b)(a-b)$$

$$\left(a-b\right)^{2}=aa-ab-ba+bb$$

$$\left(a-b\right)^{2}=a^{2}-ab-ba+b^{2}$$

$$\left(a-b\right)^{2}=a^{2}-2ab+b^{2}$$

**Exemple :** Factoriser $B=25x^{2}-30x+9$

*Réponse*

On remarque que $25x^{2}=\left(5x\right)^{2}$ et que $9=3^{2}$.

Il se peut donc que $B=a^{2}-2ab+b^{2}$ avec $\left\{\begin{matrix}a=5x\\b=3\end{matrix}\right.$

$2ab$ donne bien $2ab=2×5x×3=30x$.

$25x^{2}-30x+9=\left(5x\right)^{2}-2\left(5x\right)\left(3\right)+\left(3\right)^{2}$

Donc :

$$B=\left(5x-3\right)^{2}$$

## Une différence de deux carrés

Pour tous réels $a$ et $b$ on a :

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=aa-ab+ba-bb$$

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^{2}-ab+ab-b^{2}$$

Finalement :

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)=a^{2}-b^{2}$$

**Exemple :** Factoriser $C=25x^{2}-64$

*Réponse*

On remarque que $25x^{2}=\left(5x\right)^{2}$ et que $64=8^{2}$.

donc $25x^{2}-64$ est de la forme $a^{2}-b^{2}$ avec $a=5x$ et $b=8$.

Donc $25x^{2}-64 $se factorise en :

$$C=\left(5x+8\right)(5x-8)$$

# Equation « produit nul »

Une équation « produit nul » est de la forme :

$$\left(ax+b\right)\left(cx+d\right)=0 avec a\in R, b\in R, c\in R et d\in R$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l’un au moins des facteurs est nul.

**Exemple 1 :** Résoudre dans $R$ l’équation $\left(x+2\right)\left(-x+3\right)=0$

*Réponse*

$$\left(x+2\right)\left(-x+3\right)=0$$

$\left(x+2\right)=0$ ou $\left(-x+3\right)=0$

$x=-2$ ou $3=x$

L’ensemble des solution $S=\left\{-2 ;3\right\}$

**Exemple 2 :** Résoudre dans $R$ l’équation $\left(2x-7\right)\left(x+1\right)-x^{2}+1=0$

*Réponse*

Il faut d’abord factoriser pour avoir une équation produit. On peut utiliser une identité remarquable.

$$\left(2x-7\right)\left(x+1\right)-x^{2}+1=0$$

$$\left(2x-7\right)\left(x+1\right)+1-x^{2}=0$$

$$\left(2x-7\right)\left(x+1\right)+1^{2}-x^{2}=0$$

$$\left(2x-7\right)\left(x+1\right)+(1+x)(1-x)=0$$

Puis on factorise en utilisant le facteur commun $(x+1) $:

$$\left(x+1\right)(2x-7+1-x)=0$$

$$\left(x+1\right)(x-6)=0$$

$\left(x+1\right)=0$ ou $\left(x-6\right)=0$

$x=-1$ ou $x=6$

L’ensemble des solution $S=\left\{-1 ;6\right\}$

# Simplifier des quotients

$$\frac{a×c}{b×c}=\frac{a}{b} avec a\in R, b\in R^{\*} et c\in R^{\*}$$

**Exemple 1 :** Simplifier l’expression

$$A=\frac{3x^{2}+6x}{x+2}$$

*Réponse*

Il faut d’abord écrire la condition pour un quotient. On ne peut pas diviser par zéro, donc il y a une condition :

$$x+2\ne 0$$

$$x\ne -2$$

Ensuite on factorise et on simplifie si possible :

$$A=\frac{3x(x+2)}{x+2}$$

On divise le numérateur et le dénominateur par $x+2$.

$A=3x$ pour tout $x\in R-\left\{-2\right\}$

**Exemple 2 :** Mettre sous la forme d’un seul quotient l’expression $B=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}$

*Réponse*

Il faut d’abord écrire les conditions pour un quotient. On ne peut pas diviser par zéro, donc il y a deux conditions :

$x\ne 0$ et $x+1\ne 0$

$$x\ne 0 et x\ne -1$$

Ensuite on met sur le même dénominateur les deux fractions :

$$B=\frac{1(x+1)}{x(x+1)}+\frac{2(x)}{\left(x+1\right)x}$$

On peut ensuite les additionner :

$$B=\frac{1\left(x+1\right)+2x}{x(x+1)}$$

$$B=\frac{3x+1}{x(x+1)} pour tout x\in R-\left\{-1 ; 0\right\}$$

# Equation « quotient nul »

$$\frac{A}{B}=0 avec A\in R et B\in R^{\*}$$

Un quotient de facteurs est nul si et seulement si **le numérateur est nul** et le dénominateur non nul.

**Exemple 1 :** Résoudre dans $R$ l’équation $\frac{\left(2-x\right)\left(x+1\right)}{x-1}=0$

*Réponse*

Condition : $x-1\ne 0$

$$x\ne 1$$

$$\left(2-x\right)\left(x+1\right)=0$$

$\left(2-x\right)=0$ ou $\left(x+1\right)=0$

$x=2$ ou $x=-1$

La condition est respectée par ces deux valeurs donc l’ensemble des solution $S=\left\{-1 ;2\right\}$

**Exemple 2 :** Résoudre dans $R$ l’équation

$$\frac{x^{2}-9}{x-3}=0$$

*Réponse*

Condition : $x-3\ne 0$

$$x\ne 3$$

$$x^{2}-9=0$$

$\left(x+3\right)(x-3)=0$

$x+3=0$ ou $x-3=0$

$x=-3$ ou $x=3$

La condition n’est pas respectée par une des deux valeurs donc l’ensemble des solution $S=\left\{-3\right\}$

**Exemple 3 :** Résoudre dans $R$ l’équation

$$\frac{3x-1}{x+2}=4$$

*Réponse*

Condition : $x+2\ne 0$

$$x\ne -2$$

On fait d’abord apparaitre $0$ dans un des membres de l’équation :

$\frac{3x-1}{x+2}-4=0$.

On met sur un même dénominateur :

$\frac{3x-1}{x+2}-\frac{4(x+2)}{x+2}=0$.

$\frac{3x-1-4(x+2)}{x+2}=0$.

$\frac{3x-1-4x-8}{x+2}$.

$\frac{-x-9}{x+2}=0$.

$$-x-9=0$$

$$x=-9$$

La condition est respectée par cette valeur donc l’ensemble des solution $S=\left\{-9\right\}$

# Inéquation produit et inéquation quotient

Elles sont de la forme :

 $A×B<0 avec A\in R et B\in R$ ou $\frac{A}{B}<0 avec A\in R et B\in R^{\*}$

On peut avoir $< , \leq , \geq ou >$ dans l’inéquation à résoudre.

Elles se résolvent en faisant un tableau de signes qui utilise la règle des signes du produit (ou du quotient) de deux nombres relatifs :

- Des facteurs de même signe donnent un produit (ou un quotient) positif ;

- Des facteurs de signes contraires donnent un produit (ou un quotient) négatif.

**Exemple 1 :** Résoudre dans $\left[-3 ;6\right]$ l’inéquation $3\left(x-2\right)\left(x+2\right)\leq 0$

On place dans la première ligne l’ensemble de résolution et les valeurs de $x$ qui annulent chaque facteur.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x$$ | $$-3$$ |  | $$-2$$ |  | $$ 2$$ |  | $$6$$ |
| Signe de $3$ |  | $$+$$ |  | $$+$$ |  | $$ +$$ |  |
| Signe de $x-2$ |  | $$-$$ |  | $$-$$ | $$ 0$$ | $$ +$$ |  |
| Signe de $x+2$ |  | $$-$$ | $$ 0$$ | $$+$$ |  | $$ +$$ |  |
| Signe de $3(x-2)(x+2)$ |  | $$+$$ | $$ 0$$ | $$-$$ | $$ 0$$ | $$ +$$ |  |

On lit sur la dernière ligne que $3\left(x-2\right)\left(x+2\right)$ est négatif (donc inférieur ou égal à zéro) lorsque $x\in \left[-2 ;2\right]$.

L’ensemble des solutions de l’inéquation est $S=\left[-2 ;2\right]$.

**Exemple 2 :** Résoudre dans $\left[-3 ;6\right]$ l’inéquation $\frac{3\left(x-2\right)}{x+2}\leq 0$.

*Réponse*

Condition : $x+2\ne 0$

$$x\ne -2$$

On dit que $-2$ est une valeur « interdite » au sens où il n’est pas possible de calculer la valeur de $\frac{3\left(x-2\right)}{x+2}$ pour $x=-2$. La valeur interdite est signalée par une double barre dans la dernière ligne du tableau de signes.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x$$ | $$-3$$ |  | $$-2$$ |  | $$ 2$$ |  | $$6$$ |
| Signe de $3$ |  | $$+$$ |  | $$+$$ |  | $$ +$$ |  |
| Signe de $x-2$ |  | $$-$$ |  | $$-$$ | $$ 0$$ | $$ +$$ |  |
| Signe de $x+2$ |  | $$-$$ | $$ 0$$ | $$+$$ |  | $$ +$$ |  |
| Signe de $\frac{3\left(x-2\right)}{x+2}$ |  | $$+$$ | $$ $$ | $$-$$ | $$ 0$$ | $$ +$$ |  |

On lit sur la dernière ligne que $\frac{3\left(x-2\right)}{x+2}$est négatif (donc inférieur ou égal à zéro) lorsque $x\in \left]-2 ;2\right]$.

L’ensemble des solutions de l’inéquation est $S=\left]-2 ;2\right]$.