Chapitre 2 : Repérage dans le plan

[1 Repère orthonormé et notation des coordonnées 2](#_Toc76227506)

[2 Coordonnées du milieu d'un segment 2](#_Toc76227507)

[2.1 Découverte 2](#_Toc76227508)

[2.2 Formule des coordonnées du milieu 3](#_Toc76227509)

[2.3 Application 3](#_Toc76227510)

[3 Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme 4](#_Toc76227511)

[3.1 Recherche de la méthode 4](#_Toc76227512)

[3.2 Exemple 4](#_Toc76227513)

[4 Coordonnées d'un point obtenu par symétrie centrale 5](#_Toc76227514)

[4.1 Symétrie centrale 5](#_Toc76227515)

[4.2 Exemple 5](#_Toc76227516)

[4.3 Calculer les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme 7](#_Toc76227517)

[5 Calculer une distance dans un repère orthonormé 8](#_Toc76227518)

[5.1 Découverte 8](#_Toc76227519)

[5.2 Formule de la distance entre deux points 9](#_Toc76227520)

[5.3 Démontrer la nature d'un triangle 9](#_Toc76227521)

[5.4 Démontrer la nature d'un parallélogramme 10](#_Toc76227522)

Chapitre 2 : Repérage dans le plan

# Repère orthonormé et notation des coordonnées

$$y$$

$$x$$

$$O$$

$$-1$$

$$1$$

$$1$$

$$2$$

$$A$$

1,5 cm

1,5 cm

unités de longueur

Origine

Axe des abscisses

Axe des ordonnées

$$x\_{A}$$

$$y\_{A}$$

$$J$$

$$I$$

Le repère représenté ci-dessus est le repère $(O, I, J)$ où$O$ est **l'origine** du repère et $I$ et$J$ sont les points associés aux **graduations** $1$ **sur l'axe des abscisses** $(Ox)$ **et sur** **l'axe des ordonnées** $\left(Oy\right).$

Le repère $(O, I, J)$ est orthonormé ce qui signifie :

$$\left\{\begin{array}{c}(OI)⊥(OJ)\\OI=1\\OJ=1\end{array}\right.$$

L'unité de longueur pour ce graphique est $1,5 cm$.

Cela signifie que l'on place la graduation $1$ à $1,5 cm$ de la graduation $0$.

On dit : "On considère le repère orthonormé $(O, I, J)$ d'unité 1,5 cm."

Dans ce repère, le point $A$ a pour coordonnées $(2 ; -1)$. On note $A(2 ; -1)$**.**

* $ 2$ est l'abscisse de $A$. On note $x\_{A}=2.$
* $-1$ est l'ordonnée de $A$. On note $y\_{A}=-1.$

On aurait pu choisir une autre unité de longueur pour faire le graphique.

# Coordonnées du milieu d'un segment

## Découverte

On se place dans un repère orthonormé $(O, I, J)$ d'unité 1 cm.

Conjecturer[[1]](#footnote-1) les coordonnées du point $K$ qui est le milieu du segment $\left[AB\right]$ dans les cas suivants :

$$x$$

$$x$$

$$x$$

$$y$$

$$y$$

$$y$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $A(2 ;3)$ et $B(4 ;1)$ | $A(1 ;0)$ et $B(3 ;4)$ | $A(1 ;-2)$ et $B(2 ;4)$ |
|  |  |  |

*Réponse :* Il semble que :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Pour $A(2 ;3)$ et $B(4 ;1)$ | Pour $A(1 ;0)$ et $B(3 ;4)$ | Pour $A(1 ;-2)$ et $B(2 ;4)$ |
| on a le milieu $K(3 ;2)$. | on a le milieu $K(2 ;2)$. | on a le milieu $K(1,5 ;1)$. |

## Formule des coordonnées du milieu

Si dans un repère $(O, I, J)$ on a $A(x\_{A} ;y\_{A})$ et $B(x\_{B} ;y\_{B})$ alors le milieu $K$ du segment $\left[AB\right]$ a pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{c}x\_{K}= \frac{x\_{A}+x\_{B}}{2}\\y\_{K}= \frac{y\_{A}+y\_{B}}{2}\end{array}\right.$.

Autrement dit, **les coordonnées du milieu sont les moyennes** des coordonnées des points.

## Application

On donne dans un repère orthonormé les points $A(-2 ;-1)$ et $B(5 ;-3)$. Calculer les coordonnées de $K$ le milieu de $\left[AB\right]$.

*Réponse :*

$\left\{\begin{array}{c}x\_{K}= \frac{-2+5}{2}\\y\_{K}= \frac{-1-3}{2}\end{array}\right.$.

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{K}= \frac{3}{2}\\y\_{K}= \frac{-4}{2}\end{array}\right.$$

Donc $K(1,5 : -2)$.

# Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

## Recherche de la méthode

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Propriétés supplémentaires** |  |
|  |  |  |
| ***Quadrilatère quelconque*** |  | ***Parallélogramme*** |

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il existe plusieurs méthodes :

$$\left\{\begin{array}{c}\left(AB\right)∥ \left(DC\right)\\et\\\left(AD\right)∥ \left(BC\right)\end{array}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{array}{c}\left(AB\right)∥ \left(DC\right)\\et\\AB=DC\end{array}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{array}{c}AB=DC\\et\\AD=BC\end{array}\right.$$

ou

$$\left[AC\right] et \left[BD\right] ont le même milieu K$$

C'est cette dernière méthode que nous allons utiliser.

## Exemple

Dans un repère orthonormé $(O, I, J)$ on considère les points :

$A\left(-1 ;2\right), B\left(2 ;1\right), C(4 ;-2)$ et $D(1 ;-1)$. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

*Réponse :*

On pose $K$ le milieu de $\left[AC\right]$ et $L$ le milieu de $\left[BD\right]$.

Calcul des coordonnées de $K$

$\left\{\begin{array}{c}x\_{K}= \frac{-1+4}{2}\\y\_{K}= \frac{2-2}{2}\end{array}\right.$.

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{K}= \frac{3}{2}\\y\_{K}= \frac{0}{2}\end{array}\right.$$

Donc $K(1,5 : 0)$.

Calcul des coordonnées de $L$

$\left\{\begin{array}{c}x\_{L}= \frac{2+1}{2}\\y\_{L}= \frac{1-1}{2}\end{array}\right.$.

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{L}= \frac{3}{2}\\y\_{L}= \frac{0}{2}\end{array}\right.$$

Donc $L(1,5 : 0)$.

Les points $K$ et $L$ ont les mêmes coordonnées. Donc ils sont confondus. Donc les diagonales du quadrilatère $ABCD$ ont le même milieu. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

# Coordonnées d'un point obtenu par symétrie centrale

## Symétrie centrale



$A'$ est l'image de $A$ par la symétrie de centre $K$. $K$ est alors le milieu du segment $\left[AA'\right]$.

## Exemple

Soit $S(2 ;-3)$ et $A(5 ;-9)$ dans un repère orthonormé. On appelle $B $le symétrique de $A$ par la symétrie de centre $S$. Calculer les coordonnées de $B$.

*Réponse :*



$S(2 ;-3)$ et $A(5 ;-9)$. Les propositions[[2]](#footnote-2) suivantes sont équivalentes :

* $B $ est le symétrique de $A$ par la symétrie de centre $S$
* $S$ est le milieu du segment $\left[AB\right]$
* $\left\{\begin{array}{c}x\_{S}= \frac{x\_{A}+x\_{B}}{2}\\y\_{S}= \frac{y\_{A}+y\_{B}}{2}\end{array}\right.$
* $\left\{\begin{array}{c}2= \frac{5+x\_{B}}{2}\\-3= \frac{-9+y\_{B}}{2}\end{array}\right.$
* $\left\{\begin{array}{c}2×2= 5+x\_{B}\\2×-3= -9+y\_{B}\end{array}\right.$
* $\left\{\begin{array}{c}2×2-5= x\_{B}\\2×-3+9= y\_{B}\end{array}\right.$
* $\left\{\begin{array}{c}-1= x\_{B}\\3= y\_{B}\end{array}\right.$

Donc $B(-1 ;3)$. On peut vérifier le résultat graphiquement :

$$y$$

$$x$$



## Calculer les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme

Soit $A\left(2 ;-3\right), B(6 ;5)$ et $C(9 ;-1)$ dans un repère orthonormé. Calculer les coordonnées du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.



***Ceci est un schéma de principe et non le schéma réel***

*Réponse :*

$ABCD$ est un parallélogramme. Appelons $K$ son centre.

Calculons les coordonnées de $K$.

$K$ est le milieu du segment $\left[AC\right]$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{K}= \frac{x\_{A}+x\_{C}}{2}\\y\_{K}= \frac{y\_{A}+y\_{C}}{2}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}x\_{K}= \frac{2+9}{2} \\y\_{K}= \frac{-3-1}{2}\end{array}\right.$$

Donc $K(\frac{11}{2} ;-2)$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

* $D$ est le symétrique de $B$ par rapport à $K$.
* $K$ est le milieu du segment $\left[BD\right]$
* $\left\{\begin{array}{c}x\_{K}= \frac{x\_{B}+x\_{D}}{2}\\y\_{K}= \frac{y\_{B}+y\_{D}}{2}\end{array}\right.$
* $\left\{\begin{array}{c}\frac{11}{2}= \frac{6+x\_{D}}{2}\\-2= \frac{5+y\_{D}}{2}\end{array}\right.$
* $\left\{\begin{array}{c}2×\frac{11}{2}= 6+x\_{D}\\2×-2= 5+y\_{D}\end{array}\right.$
* $\left\{\begin{array}{c}11-6= x\_{D}\\-4-5= y\_{D}\end{array}\right.$
* $\left\{\begin{array}{c}5= x\_{D}\\-9= y\_{D}\end{array}\right.$

Donc $D(5 ;-9)$

On peut vérifier le résultat graphiquement :

$$x$$

$$y$$



# Calculer une distance dans un repère orthonormé

## Découverte

$$x$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| C$$y\_{A}$$$$y\_{B}$$$$1 u.l.$$$$x\_{B}-x\_{A}=5-2=3 u.l.$$$$0,5 u.l.$$$$1 u.l.$$$$1 u.l.$$$$1 u.l.$$$$y$$ | $$y\_{B}-y\_{A}=$$$$3-1=$$$$2 u.l.$$ | $$1 u.l.$$$$x\_{B}-x\_{A}=5-2=3 u.l.$$$$0,5 u.l.$$$$1 u.l.$$$$1 u.l.$$$$1 u.l.$$$$y$$ |
| $A\left(2 ;1\right) B(5 ;3)$$$x\_{A}$$$$x\_{B}$$dans un repère d'unité 1 cm |  | $$A\left(2 ;1\right) B(5 ;3)$$dans un repère d'unité 1,5 cm $$x$$ |

* La longueur $AB$ est fixe en **u**nité de **l**ongueur (u. l.) mais pas en cm.

La formule que nous cherchons permet de calculer **la distance en unité de longueur**.

Cherchons une valeur approximative de $AB$ avec la règle.

On trouve $AB≈3,5 u.l.$ **sur les deux schémas**.

* Calculons $AB$ en $u.l.$ grâce au théorème de Pythagore dans le triangle $ABC$ rectangle en $C$.

$$AB^{2}=\left(x\_{B}-x\_{A}\right)^{2}+\left(y\_{B}-y\_{A}\right)^{2}$$

$$AB=\sqrt{\left(x\_{B}-x\_{A}\right)^{2}+\left(y\_{B}-y\_{A}\right)^{2}}$$

$$AB=\sqrt{\left(5-2\right)^{2}+\left(3-1\right)^{2}}$$

$$AB=\sqrt{\left(3\right)^{2}+\left(2\right)^{2}}$$

$$AB=\sqrt{9+4}$$

$$AB=\sqrt{13}≈3,6 u.l.$$

La distance, quelle que soit l'échelle graphique, est $\sqrt{13}$. Mais, si on connait la valeur de l'unité de longueur en cm, alors on peut calculer la longueur $AB$ en cm :

* Sur le schéma 1 on a $AB=\sqrt{13} cm $ car $1 u.l. =1 cm.$
* Sur le schéma 2 on a $AB=\sqrt{13}×1,5≈5,4 cm $car $1 u.l. =1,5 cm.$

## Formule de la distance entre deux points

Soit deux points $A(x\_{A};y\_{A})$ et $B(x\_{B} ;y\_{B})$ dans un repère **orthonormé**.

La distance $AB$ est donnée par la formule :

$$AB=\sqrt{\left(x\_{B}-x\_{A}\right)^{2}+\left(y\_{B}-y\_{A}\right)^{2}}$$

***Remarque :***

Dans le calcul $\sqrt{A+B}$ , **la somme** $A+B $ **est prioritaire** car $\sqrt{A+B}= \sqrt{\left(A+B\right)}$ .

Les parenthèses sont sous-entendues.

On rappelle que $\sqrt{A+B} \ne \sqrt{A}+\sqrt{B}$ et donc $AB\ne \sqrt{\left(x\_{B}-x\_{A}\right)^{2}}+ \sqrt{\left(y\_{B}-y\_{A}\right)^{2}}$

## Démontrer la nature d'un triangle

* Calculer les trois côtés.
* Regarder si certaines propriétés sont vérifiées :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Triangle **quelconque** | Triangle **rectangle** | Triangle **isocèle** | Triangle **équilatéral** |
|  |  |  |  |
| Aucune propriété particulière. | Il a un angle droit. | Il a deux côtés de même longueur. | Il a trois côtés de même longueur. |
|  | * Montrer que $AB^{2}=AC^{2}+BC^{2}$
 | * Montrer que$AC=CB$.
 | * Montrer que$AB=AC $ et$AC=CB$.
 |

## Démontrer la nature d'un parallélogramme

* Calculer deux côtés *consécutifs* et les diagonales.
* Regarder si certaines propriétés sont vérifiées :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Parallélogramme **quelconque** | **Rectangle** | **Losange** | **Carré** |
|  |  |  |  |
| Aucune propriété particulière. | Diagonales de même longueur. | Côtés *consécutifs* de même longueur. | A la fois rectangle et losange. |
|  | * Montrer que$AC=BD$.
 | * Montrer que$AB=BC$.
 | * Montrer que$AC=BD $ et$AB=BC$.
 |

***Remarque :***

* Si, dans un exercice **on part d'un quadrilatère quelconque**, alors il faut **d'abord démontrer que c'est un parallélogramme** en suivant la méthode vue au §3.1.
* Puis on applique la méthode ci-dessus pour démontrer que c'est un rectangle, un losange ou un carré.
1. **Conjecturer :** émettre une conjecture c’est-à-dire faire une supposition. [↑](#footnote-ref-1)
2. **Proposition :** Affirmation [↑](#footnote-ref-2)