N°47003

Partie 1

Soit l'équation différentielle (E) : $2y' + 4y = -8x$

Soit a et b deux réels tels que la fonction $f_0 : x \mapsto ax + b$ soit une solution de (E).

Déterminer a et b et en déduire l'expression de f_0.

$$-2x + 1$$

Correct 😀

Solution

On calcule $f_0'(x)$

Puisque $f_0(x) = ax + b$ alors $f_0'(x) = a$

Dans l'équation on remplace y' par $f_0'(x)$ et y par $f_0(x)$. Cela permet de calculer a et b :

$2(a) + 4(ax + b) = -8x.$

$2a + 4ax + 4b + 8x = 0.$

On regroupe par puissances de x :

$(4a + 8)x + (2a + 4b) = 0.$

Cela équivaut à

$\begin{cases} 4a + 8 = 0 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4a = -8 \\ 4b = -2a \end{cases}$

$\begin{cases} a = -2 \\ b = -\dfrac{1}{2}a \end{cases}$

$\begin{cases} a = -2 \\ b = -\dfrac{1}{2} \times -2 \end{cases}$

$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc $f_0(x) = \mathbf{-2x + 1}$

Partie 2

Résoudre l'équation différentielle (E') : $2y' + 4y = 0$.
On donnera la forme générale de la solution la plus simple possible, en utilisant A pour la valeur non fixée.
Par exemple : $y : x \mapsto Ae^{2x} + 3$.

$$y : x \mapsto Ae^{-2x}$$

Correct

Solution

On met l'équation différentielle (E') sous la forme $y' = ay$ pour avoir des solutions sous la forme $f(x) = Ke^{ax}$

$2y' + 4y = 0$

$2y' = -4y$

$y' = -2y$

Donc les solutions sont de la forme $f(x) = Ke^{-2x}, \quad K \in \mathbb{R}$.

Puisque l'énoncé utilise la lettre A pour la constante réelle, alors les solutions sont les fonctions $x \longmapsto \boldsymbol{Ae^{-2x}}$

Partie 3

En déduire l'ensemble des solutions de (E).
On donnera la forme générale de la solution la plus simple possible, en utilisant A pour la valeur non fixée.
Par exemple : $y : x \mapsto Ae^{2x} + 3$.

$$y{:}x{\mapsto}Ae^{-2x} - 2x + 1$$

Correct

Solution

Pour résoudre l'équation différentielle (E) on la met sous la forme $y' = ay + f$.

$2y' + 4y = -8x$

$2y' = -4y - 8x$

$y' = -2y - 4x$

Les solutions sont de la forme $u(x) + v(x)$ où :

$u(x)$ est une solution particulière de l'équation complète

$v(x)$ est la solution générale de l'équation $y' = ay$

D'après la partie 1 on a $\boldsymbol{u(x) = -2x + 1}$

D'après la partie 2 on a $\boldsymbol{v(x) = Ae^{-2x}}$

Alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $x \longmapsto \boldsymbol{Ae^{-2x} - 2x + 1}$