Chapitre 7 : Loi binomiale

Chapitre 7 : Loi binomiale

1 Loi de Bernoulli

Définition 1

Une expérience qui ne comporte que deux issues possibles (succès S ou échec $\bar{S}$) est appelée **épreuve de Bernoulli**.

Exemple

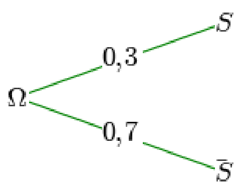
On tire au hasard une boule d'une urne qui contient 10 boules.

Parmi ces boules, trois sont blanches et sept sont noires. On appelle « succès » l'événement « on tire une boule blanche » et « échec » l'événement « on tire une boule noire ».

Etant donné la composition de l'urne, la probabilité d'obtenir un succès est $p = \frac{3}{10}$ et la probabilité d'obtenir un échec est $q = \frac{7}{10}$ (dans tous les cas on a : $q = 1 - p$).

La variable aléatoire X « **nombre de succès** » sur un tirage peut prendre seulement deux valeurs :

- $X = 1$ si la boule tirée est blanche
- $X = 0$ si la boule tirée est noire



Tirage	Résultat	X	Probabilité
	S	1	0,3
	$\bar{S}$	0	0,7

La loi de probabilité de X est :

x_i	0	1
$P\ (X = x_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

Définition 2

On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p.

Exemple

Dans l'exemple précédent, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$.

2 Loi binomiale

2.1 Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle **schéma de Bernoulli**[1], un tirage qui consiste à répéter $\boldsymbol{n}$ **fois et de manière indépendante** la **même épreuve de Bernoulli** donnant :

- soit un succès avec la probabilité p

- soit un échec avec la probabilité $q = 1 - p$.

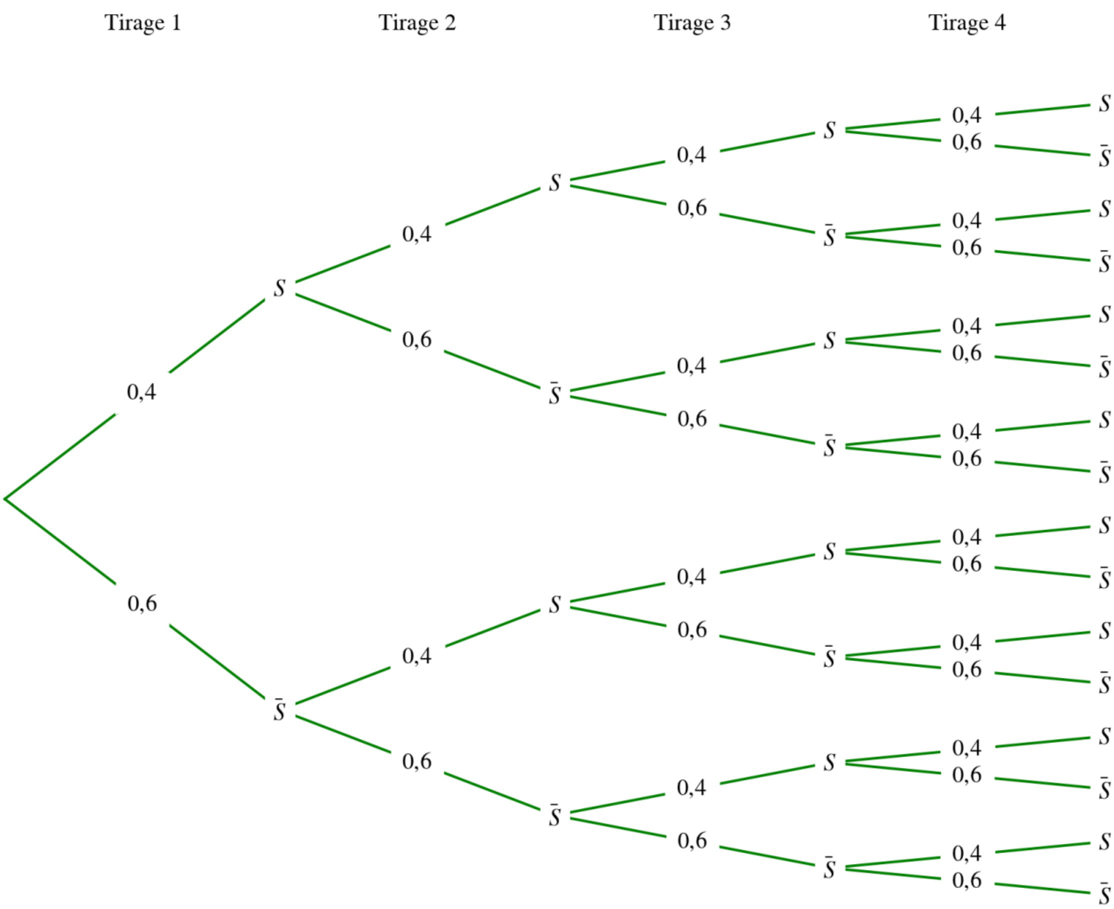
<u>Exemple :</u>

Une urne contient 10 boules : 6 noires et 4 boules blanches. On prélève au hasard successivement, **avec remise**, 4 boules de l'urne. X désigne le nombre de boules blanches obtenues **à l'issue des 4 tirages**. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?

Réponse : Un tirage de 4 boules consiste en 4 épreuves, <u>identiques et indépendantes</u> (car les prélèvements sont avec remise). Chaque épreuve a deux issues possibles :

- « succès » S : la boule est blanche avec la probabilité $p = 0{,}4$
- « échec » $\bar{S}$: la boule est noire avec la probabilité $q = 0{,}6$

La variable aléatoire X « nombre de succès » suit la loi $\mathcal{B}(n\,,p)$ de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}4$.



Résultat	X	Probabilité
$SSSS$	4	$0{,}4^4 \times 0{,}6^0$
$SSS\bar{S}$	3	$0{,}4^3 \times 0{,}6^1$
$SS\bar{S}S$	3	$0{,}4^3 \times 0{,}6^1$
$SS\bar{S}\bar{S}$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$S\bar{S}SS$	3	$0{,}4^3 \times 0{,}6^1$
$S\bar{S}S\bar{S}$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$S\bar{S}\bar{S}S$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$S\bar{S}\bar{S}\bar{S}$	1	$0{,}4^1 \times 0{,}6^3$
$\bar{S}SSS$	3	$0{,}4^3 \times 0{,}6^1$
$\bar{S}SS\bar{S}$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$\bar{S}S\bar{S}S$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$\bar{S}S\bar{S}\bar{S}$	1	$0{,}4^1 \times 0{,}6^3$
$\bar{S}\bar{S}SS$	2	$0{,}4^2 \times 0{,}6^2$
$\bar{S}\bar{S}S\bar{S}$	1	$0{,}4^1 \times 0{,}6^3$
$\bar{S}\bar{S}\bar{S}S$	1	$0{,}4^1 \times 0{,}6^3$
$\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}$	0	$0{,}4^0 \times 0{,}6^4$

[1] **Jacques Bernoulli** (Bâle 1654 - Bâle. 1705) mathématicien suisse. Il perfectionna le calcul différentiel et le calcul intégral créé par Leibniz. Il posa les fondements du calcul des probabilités.

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	TOTAL
$P(X = x_i)$	$\mathbf{1} \times 0{,}4^0 \times 0{,}6^4$	$\mathbf{4} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^3$	$\mathbf{6} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^2$	$\mathbf{4} \times 0{,}4^3 \times 0{,}6^1$	$\mathbf{1} \times 0{,}4^4 \times 0{,}6^0$	1

Les coefficients **1 4 6 4 1** sont des **coefficients binomiaux**. Ils indiquent le nombre de chemins possibles pour un nombre de succès donné.

On les note : $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

- La loi de probabilité de X a les valeurs numériques suivantes :

x_i	0	1	2	3	4	TOTAL
$P(X = x_i)$	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256	1

- La loi de probabilité peut être obtenue dans les listes statistiques de la calculatrice TI :
- Appuyer sur la touche Stats, puis dans le menu EDIT choisir EffListe[2] L_1, L_2
- Appuyer sur Stats, puis dans le menu EDIT choisir Edite. Remplir la liste L_1 avec 0, 1, 2, 3, 4.
- Sélectionner le titre de la colonne L_2, entrée, et saisir la formule $L_2 = \text{binomFdp}(4\,, 0.4\,, L_1)$

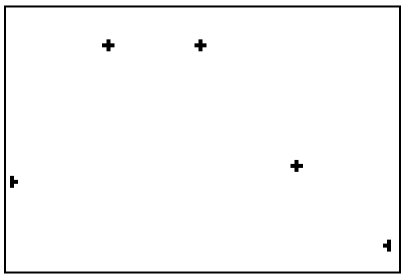
Pour trouver la fonction binomFdp, appuyer sur 2nde [distrib] et descendre dans le menu DISTRIB.

La représentation graphique de la loi de probabilité de X avec 2nd graph stats :

- Graph 1 Entrée
- Activer l'affichage
- Type : 1er type de graphique
- Liste X : L_1
- Liste Y : L_2
- Marque : points en forme de croix

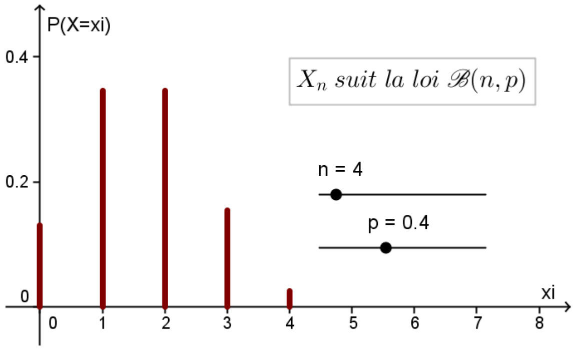
Régalage de la fenêtre :

- fenêtre
- Xmin = 0
- X max = 4
- X grad = 1
- Ymin = 0
- Y max = 0,4
- Y grad = 0,1
- Xres = 1



[2] Pour toute nouvelle utilisation des fonctions statistiques, penser à effacer les listes précédentes. Ainsi l'ancien contenu ne sera pas pris en compte dans les nouveaux calculs.

GeoGebra permet d'obtenir un diagramme en bâtons :



2.2 Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux $\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$ de l'exemple précédent valent respectivement $1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1$.

<u>Première méthode de calcul :</u>

Pour calculer les coefficients $\binom{n}{k}$, on peut construire un tableau avec, en lignes, les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ et, en colonnes, les valeurs de $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	3	1	
4	1	$\boxed{4}$	6	4	1

<u>Remarques</u>

Ce tableau est appelé triangle de **Pascal**[3].

On remarque que les coefficients sur une ligne donnée sont symétriques. Cela résulte de la propriété :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

<u>Interprétation :</u> Dans un schéma de Bernoulli à n épreuves, il y a autant de chemins réalisant k succès que de chemins réalisant $n - k$ échecs

[3] **Blaise PASCAL :** mathématicien, physicien, philosophe et écrivain français (Clermont-Ferrand, 1623 - Paris 1662).

Propriétés des coefficients binomiaux

Pour tout entier naturel n et pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Deuxième méthode de calcul

On peut calculer des coefficients binomiaux (appelés aussi nombre de combinaisons de k éléments parmi n) en utilisant la touche math de la calculatrice TI.

Par exemple pour calculer $\binom{4}{2}$,entrer 4 puis math ; PRB ; Combinaison ; 2 ; entrée.

2.3 Formule générale

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès sur une succession de n épreuves de Bernoulli où la probabilité du succès est p et la probabilité de l'échec est $q = 1 - p$.

Alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p et pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times q^{n-k}$$

Exemple

On a mis dans une urne 100 boules : 25 blanches et 75 noires.

On appelle succès l'évènement : « obtenir une boule blanche ».

Une partie de jeu consiste à tirer successivement 8 boules avec remise.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches obtenues au cours d'une partie.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2) Quelle est la probabilité d'avoir 6 boules blanches ?

Réponse :

1) Il y a $n = 8$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec comme probabilité de succès $p = 0{,}25$ et d'échec $q = 0{,}75$. Donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8\,;0{,}25)$.
2) $P(X = 6) = \binom{8}{6} \times 0.25^6 \times 0.75^2$

   $P(X = 6) = 3{,}84.10^{-3}$

2.4 Espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p est :

$$E(X) = np$$

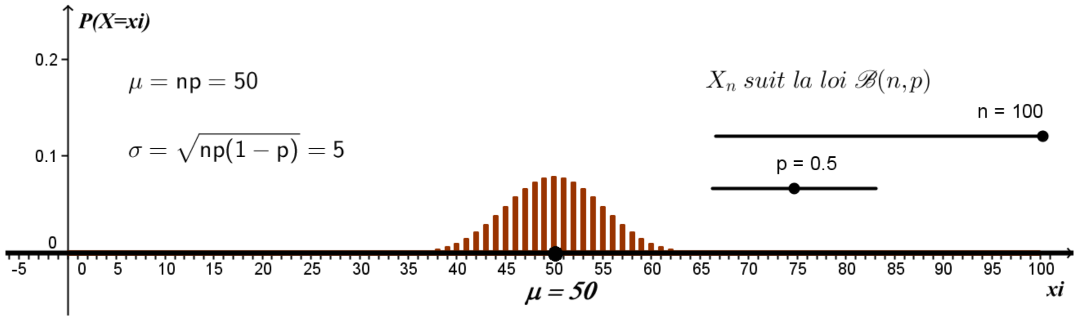
Exemples

***Si X* suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;0,50)$ alors :**

- Pour tout k entier de 0 à 100 :

$$P(X=k) = \binom{100}{k} 0{,}5^k \times 0{,}5^{100-k}$$

- En notant μ l'espérance de X, on a : $\mu = 100 \times 0{,}5 = 50$

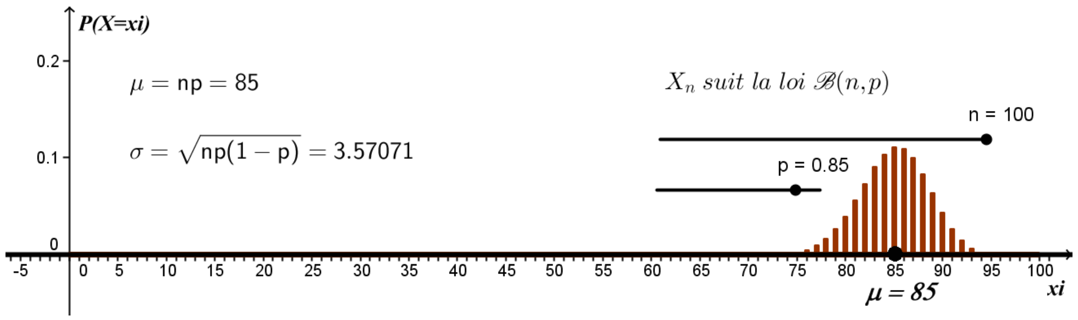


Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\,;0,85)$ alors :

- Pour tout k entier de 0 à 100 :

$$P(X=k) = \binom{100}{k} 0{,}85^k \times 0{,}15^{100-k}$$

- En notant μ l'espérance de X, on a : $\mu = 100 \times 0{,}85 = 85$



L'écart type est plus petit : les valeurs sont plus concentrées autour de μ.

Sur TI, on représente la loi binomiale à l'aide d'un histogramme (et non d'un diagramme en bâtons !) en utilisant le menu STATS . Choisir Edite… et saisir 0, 1, 2,… en L1 et se placer sur L2 et entrer binomFdp(n,p,L1).

Ensuite, dans le menu graph stats , choisir Graph1, sélectionner l'histogramme, L1 en ListeX et L2 en Effectifs.Régler le menu $\boxed{\text{fenêtre}}$, puis tracer le diagramme avec $\boxed{\text{graphe}}$.

2.5 Variance et écart-type de la loi binomiale $\mathscr{B}$ $(n\,;p)$

Sa variance est :

$$\boxed{V(X) = npq}$$

Son écart type est :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{npq}}$$

Exemple

On a mis dans une urne 100 boules : 25 blanches et 75 noires.
On appelle succès l'évènement : « obtenir une boule blanche ».
Une partie de jeu consiste à tirer successivement 8 boules avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches obtenues au cours d'une partie.

1) Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
2) Quelle est la variance de X ?
3) Quel est l'écart-type de X ?

Réponse :

1) Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8\,;0{,}25)$, son espérance est $E(X) = 8 \times 0.25$

$E(X) = 2$. C'est le nombre moyen de boules blanches obtenu par partie, sur un très grand nombre de parties.

2) La variance de X est $V(X) = 8 \times 0.25 \times 0.75$

$$V(X) = 8 \times 0.25 \times 0.75$$
$$V(X) = 1.5$$

3) L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\sigma(X) = \sqrt{1.5} = 1{,}225 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

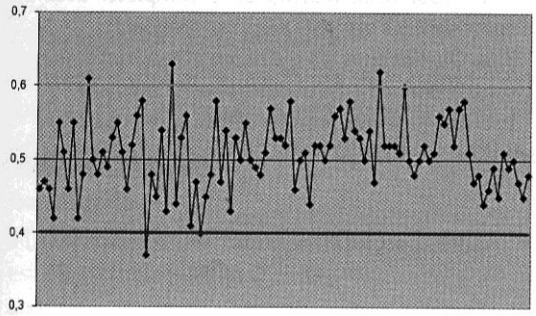
3 Intervalle de fluctuation d'une fréquence.

3.1 Propriété (vue en seconde)

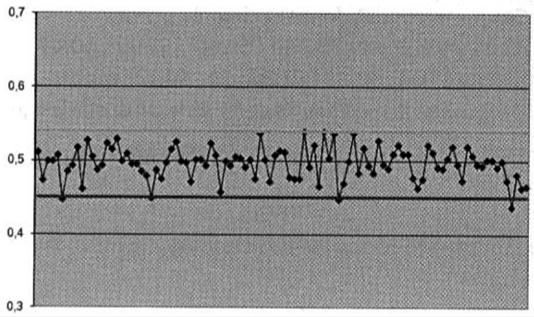
Si on analyse un grand nombre d'échantillons de taille n $(n \geq 25)$ et que l'on observe à chaque fois la fréquence d'apparition f de l'issue choisie, on s'aperçoit que pour une probabilité p comprise entre 0,2 et 0,8, au moins 95% des fréquences se situent dans l'intervalle $I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, appelé intervalle de fluctuation.

Exemple : On lance une pièce équilibrée et on s'intéresse au fait d'obtenir pile : $p = 0,5$.

100 échantillons de taille 100 : $\mathrm{I} = [0,4 ; 0,6]$.
Le graphique des fréquences obtenues est :



100 échantillons de taille 400 : $\mathrm{I} = [0,45 ; 0,55]$
Le graphique des fréquences obtenues est :



⇨ On veut améliorer ce résultat en utilisant la loi binomiale.

3.2 Intervalle de fluctuation

Propriété : L'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à la réalisation , sur un échantillon aléatoire de taille n, d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}\,(n, p)$, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ défini par :

a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$

b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$

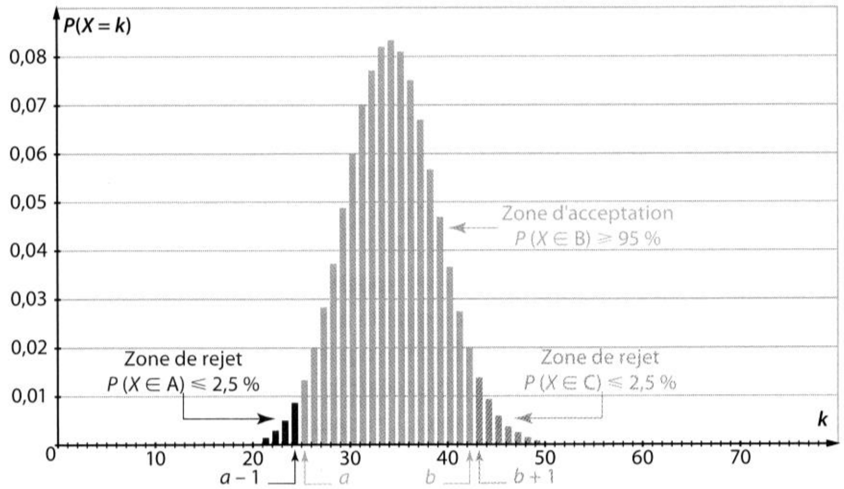
On a alors $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$ ce qui signifie que, dans au moins 95% des cas, la fréquence observée f appartient à l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$.

3.3 Étude d'un exemple

-

La proportion de personnes ayant les yeux marron dans la population française est 0,34.
On veut déterminer un intervalle de fluctuation de la fréquence f des personnes ayant les yeux marrons dans les échantillons de taille 100.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de personnes ayant les yeux marrons dans un tel échantillon. Alors, en assimilant le choix d'une personne au hasard dans cet échantillon à un tirage avec remise, on peut supposer que X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,34. Puisque X prend les valeurs entières de 0 à 100, on va partager cet ensemble de valeurs en trois parties :
A : valeurs comprises entre 0 et $a - 1$ (a entier) ;
B : valeurs comprises entre a et b (b entier) ;
C : valeurs comprises entre $b + 1$ et n.
On détermine ensuite a et b de façon que la probabilité pour que X appartienne à A et à C soit inférieure à 0,025 : on aura alors un intervalle $[a ; b]$ tel que la probabilité que X soit compris entre a et b est au moins égale à 0,95.



La condition $P(X \in \text{C}) \leqslant 0{,}025$ étant équivalente à $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$, on détermine a et b avec une table des valeurs $P(X \leqslant k)$.
On trouve $a = 25$ et $b = 43$, donc l'intervalle $[a, b]$ est $[25 ; 43]$: la fréquence f appartient à l'intervalle $[0{,}25 ; 0{,}43]$ avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Règle de décision

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un caractère est p.
Pour juger de cette hypothèse, on prélève au hasard et avec remise, un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère . On rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion dans la population est p lorsque la fréquence f observée est trop éloignée de p, dans un sens ou dans l'autre. On choisit de fixer le seuil à 95% de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, soit inférieure à 5%.

La règle de décision adoptée est :

Si $f \in \left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question et on **l'accepte**.

Sinon, on **rejette** l'hypothèse **au risque de 5%.**

« au risque de 5% » signifie que la probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, est inférieure à 5%.