

Classes de Terminale 4-5-6-7 S	DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES N°2	Vendredi 8 Novembre 2019
Lycée d'Avesnières		Durée : 2 heures
Année scolaire 2019-2020		Calculatrice autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté d'expression et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des résultats.

Exercice 1 :

(4 points)

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

- 1) Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
- 2) Pour tout entier naturel n , on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année (2015+n).
 - a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $h_{n+1} = 0,75 h_n + 30$.
 - b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de la suite (h_n) .
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

Exercice 2 :

(11 points)

Partie A :

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

- 1- Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- 2- Etudier le sens de variation de g sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variation.
- 3- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur \mathbb{R} .
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- 4- En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

- 1-
 - a. Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f .

b. Montrer alors que l'expression $f'(x)$ peut s'écrire : $f'(x) = \frac{x \times g(x)}{(x^2-1)^2}$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]1 ; +\infty[$.

2- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3- Dresser le tableau de variations de f .

Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

4- Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

Exercice 3 : *A faire uniquement par les élèves ne suivant pas l'enseignement de Spécialité.* (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte, une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n , par : $p_n = n^2 - 42n + 4$.

Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

2) Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

► $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{(u_n)^2 + 8}$;

► $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n .

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

3) On considère la suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n ,

$$n^2 \leq (n+1)^2 w_n \leq n^2 + n.$$

Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Exercice 3 bis : *A faire uniquement par les élèves suyant l'enseignement de Spécialité.* (5 points)

Cet exercice est à rendre sur une copie séparée.

Partie A : *VRAI / FAUX.*

Justifier votre réponse.

- 1) 1219 est un nombre premier.

- 2) Soit n un entier naturel non nul.
Dans la division euclidienne de $(n+2)^2$ par n , le reste est 4.

Partie B :

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $2^{3n+1} - 2$ est multiple de 7.