

1941 p 336

1) la fonction f est continue et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

$$I = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad I = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \quad \underline{I = 1}$$

Conclusion: f est une fonction densité de probabilité.

2) a) $P(X < \frac{\pi}{3}) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx$

$$P(X < \frac{\pi}{3}) = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$P(X < \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} - \sin 0$$

$$P(X < \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

$$P(X > \frac{\pi}{4}) = 1 - P(X < \frac{\pi}{4})$$

$$P(X > \frac{\pi}{4}) = 1 - [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$P(X > \frac{\pi}{4}) = 1 - (\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0) \quad P(X > \frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\approx \underline{0,293}$$

b) $P_{X > \frac{\pi}{4}}(X < \frac{\pi}{3}) = \frac{P(X < \frac{\pi}{3} \text{ et } X > \frac{\pi}{4})}{P(X > \frac{\pi}{4})}$

$$P_{X > \frac{\pi}{4}}(X < \frac{\pi}{3}) = \frac{P(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{3})}{P(X > \frac{\pi}{4})}$$

$$P_{X > \frac{\pi}{4}}(X < \frac{\pi}{3}) = \frac{[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

(d'après le calcul précédent)

$$P_{X > \frac{\pi}{4}}(X < \frac{\pi}{3}) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

$$P_{X > \frac{\pi}{4}}(X < \frac{\pi}{3}) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

$$P_{X > \frac{\pi}{4}}(X < \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{2 - \sqrt{2}}$$

$$P_{X > \frac{\pi}{4}}(X < \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \approx \underline{0,543}$$

3) a) G définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par $G(x) = x \sin x + \cos x$ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

$$G'(x) = (1) \sin x + x \cos x - \sin x$$

$$G'(x) = x \cos x$$

$$G'(x) = g(x)$$

donc G est une primitive de g sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

b) $E(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx$

$$E(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$E(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx$$

$$E(X) = [G(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$E(X) = \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - (0 \sin 0 + \cos 0)$$

$$E(X) = \left(\frac{\pi}{2} \times 1 + 0 \right) - (0 + 1)$$

$$E(X) = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \underline{E(X) \approx 0.571}$$