

- 1) • la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 5x^4$ est continue
 • la fonction f est positive sur $[0, 1]$
 • Soit $I = \int_0^1 f(x) dx$

la fonction F définie sur $[0, 1]$ par $F(x) = x^5$ est une primitive de f

donc $I = [x^5]_0^1$

$$I = 1^5 - 0^5 \quad \underline{I = 1}$$

Conclusion: la fonction f est une densité de probabilité sur $[0, 1]$

2) a) $P(X < \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$
 $P(X < \frac{1}{2}) = [x^5]_0^{\frac{1}{2}} \quad P(X < \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^5 \quad P(X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{32} \approx 0,031$

b) $P(X > 0,1) = 1 - P(X \leq 0,1)$
 $P(X > 0,1) = 1 - [x^5]_0^{0,1} \quad P(X > 0,1) = 1 - 0,1^5 \quad \underline{P(X > 0,1) = 0,99999 \approx 1}$

c) $P(0,2 < X \leq 0,8) = P(X \leq 0,8) - P(X \leq 0,2)$
 $P(0,2 < X \leq 0,8) = [x^5]_0^{0,8} - [x^5]_0^{0,2}$
 $P(0,2 < X \leq 0,8) = 0,8^5 - 0,2^5 \quad \underline{P(0,2 < X \leq 0,8) = 0,32736 \approx 0,327}$

d) $E(X) = \int_I x f(x) dx$
 $E(X) = \int_0^1 x \times 5x^4 dx$
 $E(X) = \int_0^1 5x^5 dx$

la fonction G définie sur $[0, 1]$ par $G(x) = \frac{5}{6}x^6$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 5x^5$

donc $E(X) = [\frac{5}{6}x^6]_0^1$

$$E(X) = \frac{5}{6} [x^6]_0^1$$

$$\underline{E(X) = \frac{5}{6} \approx 0,833}$$