

$$1. \quad \forall x \in [0; 1] \quad x \geq x^2$$

$$-x \leq -x^2$$

$$e^{-x} \leq e^{-x^2} \quad (\text{car la fonction exponentielle est croissante sur } [0; 1])$$

$$\text{donc } \forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq e^{-x} \leq e^{-x^2}$$

$$0 \leq xe^{-x} \leq xe^{-x^2} \quad \downarrow \times x \quad (x \geq 0)$$

$$2. \quad \text{Donc } \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 xe^{-x} dx \leq \int_0^1 xe^{-x^2} dx$$

$$\text{or } \int_0^1 0 dx = k - k = 0.$$

$$\text{Soit } f : x \mapsto xe^{-x^2}$$

$$f = -\frac{1}{2} u' e^u \quad \text{donc } F = -\frac{1}{2} e^u$$

$$\text{donc } \forall x \in [0; 1] \quad F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$\text{alors : } \int_0^1 xe^{-x^2} dx = F(1) - F(0)$$

$$\int_0^1 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-1^2} + \frac{1}{2} e^0$$

$$\int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

$$\text{donc : } 0 \leq \int_0^1 xe^{-x} dx \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$