

n° 61 p 147

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$.

1. On pose : $u_n = f(n)$

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

f est dérivable sur $[1; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f = \frac{u}{v}$$

avec

$$u(x) = \ln x$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = x^2$$

$$v'(x) = 2x$$

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \ln x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4}$$

$$1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \ln x$$

$$1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} > x \quad \text{avec} \quad e^{\frac{1}{2}} > 1 \quad \text{et} \quad e^{\frac{1}{2}} < 2$$

Donc :

x	1	$e^{\frac{1}{2}} \approx 1,649$	2	$+\infty$
x	+		+	
$1 - 2 \ln x$	+	0	-	
x^4	+		+	
$f'(x)$	+	0	-	

f est croissante sur $[1; e^{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$

2. $\forall n \geq 1 \quad u_n = f(n)$

$$\forall n \geq 2 \quad n \leq n+1$$

$$f(n) \not\geq f(n+1)$$

$$u_n \not\geq u_{n+1}$$

car f est décroissante sur $[2; +\infty[$

La suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 2$.