Thème : Les nombres premiers

Activité 2. Algorithmes sur les nombres premiers (3 exercices)

Exercice 1 : Tester la primalité

1) On considère l'algorithme suivant :

Déclaration des variables : N et J sont des entiers

Début de l'algorithme

Saisir N

Pour J allant de 2 à $E(\sqrt{N})$

Si J divise N

Alors

Afficher " N NON PREMIER"

Stopper le programme

Fin Si

Fin Pour

Afficher " N PREMIER"

Fin de l'algorithme

Note :

La fonction E est la fonction partie entière :
A tout réel x elle associe l'unique entier relatif $E(x)$ qui lui est immédiatement inférieur ou égal.

Exemples :

$E(3) = 3$; $E(3,14) = 3$; $E(-2,718) = -3$.

- Sur les calculatrices TI, il s'agit de la commande **partEnt** - ou **int** pour les calculatrices en anglais - (touche **math**, menu MATH)
- Sur les Casio, il s'agit de la commande **Intg** (touche **OPTN**, menu NUM).

Faire fonctionner sur le papier cet algorithme pour $N = 19$, $N = 21$ et $N = 53$. Qu'affiche-t-il ?

- Programmer cet algorithme sur la calculatrice (Nommer ce programme ESTPREM).
- Vérifier que le programme fonctionne pour $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$, $N = 19$, $N = 21$ et $N = 53$ puis l'utiliser pour dire parmi les nombres suivants lesquels sont premiers : 2 011 ; 2 013 ; 2 015 ; 2 017 et 2 019.
- Chronométrer le temps que met le programme ESTPREM pour tester la primalité de $N = 7\ 237\ 031$.

Exercice 2 : Liste des nombres premiers inférieurs à 1000

Pré requis : Avoir le programme ESTPREM de test de la primalité de l'exercice 1.

Objectif : Créer un algorithme qui crée la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 1009. Créer le programme LISTPREM sur la calculatrice.

1 Principe

- On utilise une nouvelle liste qui sera la Liste6 (cela laisse libres les Listes 1, 2, 3... souvent utilisées pour des calculs courants). On utilisera une version aménagée en sous-programme du programme ESTPREM pour tester si un entier naturel N est premier.

- On commence avec $N = 2$. Si N est premier

Alors on écrit N dans la liste Liste6 (à la ligne 1)

Comme 2 est premier on écrit donc 2 à la première ligne de la liste ce qui donne Liste6[1] = 2

- On incrémente¹ N de 1. On a alors $N = 3$

Si N est premier

Alors on écrit N dans la liste Liste6 (à la ligne 2)

Comme 3 est premier on écrit donc 3 à la deuxième ligne de la liste LP ce qui donne Liste6[2] = 3

- On incrémente N de 1. On a alors $N = 4$

Si N est premier

Comme 4 n'est pas premier on n'écrit donc rien dans la liste Liste6.

- On incrémente N de 1. On a alors $N = 5$

Si N est premier

Alors on écrit N dans la liste Liste6 (à la ligne 3)

Comme 5 est premier on écrit donc 5 à la troisième ligne de la liste Liste6 qui donne Liste6[3] = 5

- On réitère cette démarche tant que $N \leq 1009$

Après l'exécution du programme, on aura dans la liste Liste6 les premiers nombres premiers :

Liste6
2
3
5
7
11

¹ **Incrémenter** une variable, c'est lui ajouter une quantité constante

2 Modification du programme ESTPREM (renommé PREM)

On modifie le programme de test de primalité ESTPREM car on va en avoir besoin comme sous-programme dans le nouvel programme LISTPREM

Procédure sur calculatrice TI	Procédure sur calculatrice Casio
<ul style="list-style-type: none"> • Créer un nouveau programme PREM • Y copier le programme ESTPREM. Pour cela : Le curseur étant sur la première ligne (juste après :) 2nd sto→ <p>Prgm EXEC ESTPREM</p> <p>Entrée Entrée</p> <ul style="list-style-type: none"> • Enlever avec la touche suppr la première ligne Prompt N • Dans le programme PREM, <ul style="list-style-type: none"> ○ Remplacer la ligne Disp « NON PREMIER » par 0 → P (touche annul pour effacer la ligne sans la supprimer) ○ Remplacer Stop par Return ○ Remplacer la ligne Disp « PREMIER » par 1 → P ○ Ecrire sur la dernière ligne : Return (se trouve dans prgm CTL) 	<p>Renommer le programme ESTPREM en PREM</p> <ul style="list-style-type: none"> • Enlever avec la touche DEL la première ligne “N=’?’→N • Dans le programme PREM, <ul style="list-style-type: none"> ○ Remplacer les trois lignes “N NON PREMIER”▲ par 0 → P (touche annul pour effacer la ligne sans la supprimer) ○ Remplacer les deux lignes Disp « N PREMIER » par 1 → P <p>Ecrire sur la dernière ligne : Return (se trouve dans prgm CTL)</p>

Ainsi, le programme PREM reçoit un entier $N \geq 1$ et renvoie la variable P qui vaut 1 lorsque N est premier et 0 lorsque N est composé.

```

PREM sur TI
For(J,2, partEnt(v(N))
If N/J=partEnt(N/J)
Then
0→P
Return
End
End
1→P
Return

```

3 Algorithme LISTPREM

```

Effacer la liste Liste6
N reçoit 2
I reçoit 1
Tant que  $N \leq 1009$  faire
    Appel du sous-programme PREM
    Si  $P = 1$ 
        Alors Liste6[I] reçoit N
            I reçoit I + 1
    FinSi
    N reçoit N + 1
FinTant que
    
```

4 Programmation de la calculatrice

On traduit l'algorithme précédent en langage TI ou Casio.

4.1 Ecriture du programme LISTPREM

Saisir le programme « LISTPREM » sur la calculatrice.

Calculatrice TI	Calculatrice Casio
<p>⚠ On choisit L6 dans 2nd listes NOMS</p> <p>⚠ prgmPREM s'écrit en tapant prgm EXEC</p> <p>PREM <input type="text" value="entrer"/></p>	

LISTPREM sur TI
EffListe L6
2→N
1→I
While N≤1009
prgmPREM
If P=1
Then
N→L6(I)
I+1→I
End
N+1→N
End

LISTPREM sur Casio
ClrList 6
2→N
1→J
While N≤1009
Prog "PREM"
If P=1
Then
N→List 6[J]
J+1→J
IfEnd
N+1→N
WhileEnd
ClrText

4.2 Utilisation du programme LISTPREM

1. Exécutez-le en le chronométrant.
2. Vérifiez que vous avez obtenu dans la liste Liste6 les nombres premiers inférieurs ou égaux à 1009 en allant dans le menu Statistiques
3. On note $\pi(P)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à P . Utilisez la liste Liste6 des nombres premiers inférieurs ou égaux à 1009 pour compléter le tableau ci-dessous :

P	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\pi(P)$										

Peut-on parler d'équi-répartition des nombres premiers ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 : Recherche des diviseurs premiers inférieurs ou égaux à 1000

Pré requis : Avoir la liste des nombres premiers inférieurs à 1000 de l'exercice 2.

Objectif : Obtenir un algorithme qui donne la liste des diviseurs premiers inférieurs à 1000 d'un entier naturel non nul quelconque.

1 Principe

- On donne un entier naturel non nul N .
- On cherche dans la liste des nombres premiers P inférieurs ou égaux à 1009 ceux qui divisent N .
- On commence par créer la liste dans la calculatrice des nombres premiers de 2 à 1009 à l'aide du programme LISTPREM (voir l'exercice 2).

2 Algorithme DIVISPRE

```
Saisir N
I reçoit 1
P reçoit 0
Tant que P < 997 et P ≤ N faire
    P reçoit l'élément I de la liste Liste6
    Si N est divisible par P
        Alors
            Afficher « Divisible par », P
        Fin Si
    I reçoit I + 1
FinTant que
```

3 Programmation de la calculatrice

Travail préalable : Exécutez le programme LISTPREM et assurez-vous que la liste Liste6 contient tous les nombres premiers de 2 à 1009.

1. Ecrivez le programme « DIVISPRE » dans votre calculatrice.
2. Exécutez-le en cherchant les diviseurs premiers de
 $N = 12$; $N = 13$; $N = 985$; $N = 997$; $N = 1000$; $N = 1009$.
3. Quels sont les nombres N dont le programme donnera tous les diviseurs premiers ? Testez sur un exemple.
4. Quels sont les nombres N dont le programme donnera certains diviseurs premiers mais pas tous ? Testez sur un exemple.
5. Quels sont les nombres N dont le programme ne donnera aucun diviseur premier ? Testez sur un exemple.