CHAPITRE 4 : Problèmes d'évolution.

CHAPITRE 4 : Problèmes d'évolution

1 Suites de matrices colonnes U

1.1 Définition d'une suite de matrices colonnes

Définition 1

Une **suite (U_n) de matrices colonnes de taille p** ($p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$) est une fonction de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble[1] des matrices colonnes de taille p :

$$(U_n) :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$
$$n \longmapsto U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la matrice U_n sont les termes de rang n des p suites (u_n), (v_n),…,(t_n).

Exemple

La suite (U_n) de matrices colonnes de taille 2 définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = \begin{pmatrix} n+2 \\ n^2 \end{pmatrix}$ a pour premiers termes $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},\ U_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ …

Définition 2

Une suite de matrices converge si et seulement si **toutes les suites** (u_n), (v_n),…,(t_n) formant les coefficients de cette matrice convergent.

Exemples

- La suite (U_n) de matrices colonnes de taille 2 définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = \begin{pmatrix} n+2 \\ n^2 \end{pmatrix}$ ne converge pas, car (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_n = n + 2$ et $v_n = n^2$ divergent.
- La suite (V_n) de matrices colonnes de taille 2 définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $V_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ n^2 \end{pmatrix}$ ne converge pas, car (v_n) définie par $v_n = n^2$ diverge.
- La suite (W_n) de matrices colonnes de taille 2 définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $W_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 1 - e^{-n} \end{pmatrix}$ converge, car (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 et (v_n) définie par $v_n = 1 - e^{-n}$ converge vers 1

1.2 Suites de matrices U définies par une relation de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$

Propriété 1

Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p vérifiant, pour tout entier naturel n :

$U_{n+1} = AU_n$, où A est une matrice carrée d'ordre p.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{U_n = A^n U_0}$**.**

---

[1] Les matrices colonnes à p lignes possèdent une seule colonne. On note $\boldsymbol{\mathcal{M}_{p,1}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices **colonnes à $\boldsymbol{p}$ lignes** à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille 2 vérifiant, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \\ U_{n+1} = AU_n, \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Exprimer le terme général U_n de la suite en fonction de n.

Réponse :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad U_n = A^n U_0$.

1. Calcul de A^n

Puisque la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}$ est diagonale, on a $A^n = \begin{pmatrix} {a_{1,1}}^n & 0 \\ 0 & {a_{2,2}}^n \end{pmatrix}$.

Donc $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}3^n & 0 \\ 0 & 0{,}2^n \end{pmatrix}$

2. D'où $U_n = \begin{pmatrix} 0{,}3^n & 0 \\ 0 & 0{,}2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$U_n = \begin{pmatrix} 5 \times 0{,}3^n \\ 7 \times 0{,}2^n \end{pmatrix}$$

Démonstration

Démontrons par récurrence la propriété P_n: $\quad U_n = A^n U_0$ dépendant de l'entier naturel n.

- Initialisation

A est une matrice carrée d'ordre p donc $A^0 = I_p$

$$A^0 U_0 = I_p U_0$$
$$A^0 U_0 = U_0$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que P_k: $\quad U_k = A^k U_0$ est vraie.
D'après la définition par récurrence de la suite (U_n) on a $U_{k+1} = AU_k$.
Donc : $U_{k+1} = AA^k U_0$
D'où $U_{k+1} = A^{k+1} U_0$
Donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion :

Pour toute suite de matrices colonnes (U_n) de taille p définie par $U_{n+1} = AU_n$, où A est une matrice carrée d'ordre p, on a l'expression du terme général de la suite (U_n) en fonction de n par la relation :

$$\boldsymbol{U_n = A^n U_0}$$

Propriété 2

Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p vérifiant, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = AU_n + B$$

où $\boldsymbol{A}$ **est une matrice carrée** d'ordre p et $\boldsymbol{B}$ **une matrice colonne** de taille p.

S'il existe $\boldsymbol{C}$ **une matrice colonne** de taille p telle que $\boldsymbol{C} = A\boldsymbol{C} + B$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = AU_n + B$$
$$C = AC + B$$

En soustrayant membre à membre : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} - C = AU_n - AC$

$$U_{n+1} - C = A(U_n - C)$$

Soit (V_n) la suite de matrices définie par $V_n = U_n - C$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = AV_n$

Alors, d'après la propriété 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{V_n = A^n V_0}$.

Donc, puisque $V_n = U_n - C$, on a : $\boldsymbol{U_n - C = A^n(U_0 - C)}$

Exemple

Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille 2 vérifiant, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} \\ U_{n+1} = AU_n + B, \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Exprimer le terme général U_n de la suite en fonction de n.

Réponse :

1. On cherche une matrice colonne C telle que $C = AC + B$
   On isole C :

$$I_2C = AC + B$$
$$I_2C - AC = B$$
$$(I_2 - A)C = B$$
$$\boldsymbol{I_2 - A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}}$$
$$\boldsymbol{(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}}$$

Donc :

$$(I_2 - A)C = B$$
$$(I_2 - A)^{-1} \times (I_2 - A)C = (I_2 - A)^{-1} \times B$$
$$C = (I_2 - A)^{-1} \times B$$
$$C = \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} \\ \frac{80}{3} \end{pmatrix}$$

2. En soustrayant membre à membre :

$U_{n+1} = AU_n + B$ et $C = AC + B$, on a :

$$U_{n+1} - C = A(U_n - C)$$

$V_{n+1} = AV_n$ en posant$V_n = U_n - C$.

Donc $V_n = A^n V_0$ avec $V_0 = U_0 - C$

$$V_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} \\ \frac{80}{3} \end{pmatrix}. \quad V_0 = \begin{pmatrix} \frac{28}{9} \\ -\frac{53}{3} \end{pmatrix}.$$

$$U_n - C = A^n \begin{pmatrix} \frac{28}{9} \\ -\frac{53}{3} \end{pmatrix}$$

3. Calcul de A^n

Puisque la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ est diagonale, on a $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}1^n & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}$.

D'où $U_n = \begin{pmatrix} 0{,}1^n & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{28}{9} \\ -\frac{53}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{10}{9} \\ \frac{80}{3} \end{pmatrix}$ $\qquad U_n = \begin{pmatrix} \frac{28}{9} \times 0{,}1^n - \frac{10}{9} \\ -\frac{53}{3} \times 0{,}7^n + \frac{80}{3} \end{pmatrix}$.

1.3 Convergence des suites de matrices U définies par $U_{n+1} = AU_n + B$

<u>Propriété</u>

> Soit une suite de matrices colonnes vérifiant $U_{n+1} = AU_n + B$.
>
> On suppose qu'il existe une matrice C telle que $C = AC + B$.
>
> 1. Si $U_0 = C$ alors la suite de matrices colonnes (U_n) est constante. Elle converge donc.
> 2. Si $U_0 \neq C$ et si la suite de matrice carrées A^n converge, alors la suite (U_n) converge aussi.

<u>Exemple</u>

Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille 2 vérifiant, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} \\ U_{n+1} = AU_n + B, \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On a vu dans l'exemple précédent que la matrice C telle que $C = AC + B$ existe.

A étant diagonale, on a $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}1^n & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}$

$-1 < 0{,}1 < 1$ et $-1 < 0{,}7 < 1$ donc les suites $n \longmapsto 0{,}1^n$ et $n \longmapsto 0{,}7^n$ convergent et donc la suite des matrices A^n converge.

<u>Conclusion :</u> la suite de matrices colonnes (U_n) converge.

<u>Démonstration</u>

Les matrices de la suite (U_n) vérifient $U_{n+1} = AU_n + B$.
Donc d'après la propriété 2, $\boldsymbol{U_n = A^n(U_0 - C) + C}$
Si $U_0 \neq C$ et si la suite de matrice carrées A^n converge vers une certaine matrice A', alors la suite de matrices (U_n) converge vers $\boldsymbol{U_n = A'(U_0 - C) + C}$

2 Etude des marches aléatoires

2.1 Généralités sur les marches aléatoires

Considérons un système ou processus qui évolue de l'instant 0 à l'instant n aléatoirement, avec $n \in \mathbb{N}$. On suppose que le système occupe à chaque instant l'un des k états : $S_1, S_2, \dots S_k$, avec $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\,;1\}$. On considère **la variable aléatoire X_n** qui donne l'état S_i du système à l'instant n.

Exemple 1 :

Dans les galettes des rois, se trouve une fève parmi trois fèves possibles. Au départ (instant $n = 0$) on a déjà mangé une galette et on a donc **1** sorte de fève. L'état du système est $S_1 = \mathbf{1}$.

Après avoir mangé n galettes, le système est dans l'un des 3 états possibles : on a **1** sorte de fève, ou **2** sortes de fèves, ou **3** sortes de fèves. Donc X_n donne l'une des valeurs $\mathbf{1, 2, 3}$.

Exemple 2 :

Une personne en état d'ébriété se trouve sur un parcours comportant 5 points. Elle part du point n°3. A chaque pas, elle effectue un pas à gauche avec la probabilité 0,6 ou un pas à droite avec la probabilité 0,4. Après n pas, le système est dans l'un des 5 états possibles : la personne est au point n°1, au point n°2, au point n°3, au point n°4 ou au point n°5. Donc X_n donne 1, 2, 3, 4 ou 5.

Définition 1 : L'état probabiliste à l'instant n

Soit X_n la variable aléatoire qui donne dans lequel des états du système S_i le système est à l'instant n.
On appelle l'état probabiliste à l'instant n la *loi de probabilité* de X_n.
Donc l'état probabiliste à l'instant n est constitué de l'ensemble des états du système et de leurs probabilités respectives. Les probabilités de X_n sont les éléments d'une matrice ligne U_n.

Exemple 1 : Galettes des rois

Etats du systèmes

Etats S_i du système	$S_1 = \mathbf{1}$ sorte de fève	$S_2 = \mathbf{2}$ sortes de fèves	$S_3 = \mathbf{3}$ sortes de fèves	TOTAL
$P(X_n = S_i)$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$-2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1$	1

L'état probabiliste donné par $U_n = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad -2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)$

Exemple 2 : Personne en état d'ébriété

Etats S_i du système	La personne est en **1**	La personne est en **2**	La personne est en **3**	La personne est en **4**	La personne est en **5**	TOTAL
$P(X_0 = S_i)$	0	0	1	0	0	1

Etat probabiliste donné par $U_0 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$

Etats S_i du système	La personne est en **1**	La personne est en **2**	La personne est en **3**	La personne est en **4**	La personne est en **5**	TOTAL
$P(X_5 = S_i)$	$\frac{333}{625}$	$\frac{612}{3125}$	0	$\frac{848}{3125}$	0	1

Etat probabiliste donné par $U_5 = \left(\frac{333}{625} \quad \frac{612}{3125} \quad 0 \quad \frac{848}{3125} \quad 0\right)$

<u>Définition 2 :</u> Marche aléatoire

Une **marche aléatoire** est un modèle (c'est-à-dire une représentation) d'évolution d'un système possédant des états. Ce modèle décrit l'évolution comme une succession de pas aléatoires. La marche aléatoire est définie par : 1. L'état probabiliste initial (les probabilités de X_0 sont les éléments d'une matrice ligne U_0). 2. Les probabilités de transition de X_n vers X_{n+1} qui, contrairement à l'état probabiliste à l'instant n, **ne dépendent pas de la valeur de n.**

<u>Définition 3 :</u> Probabilités de transition

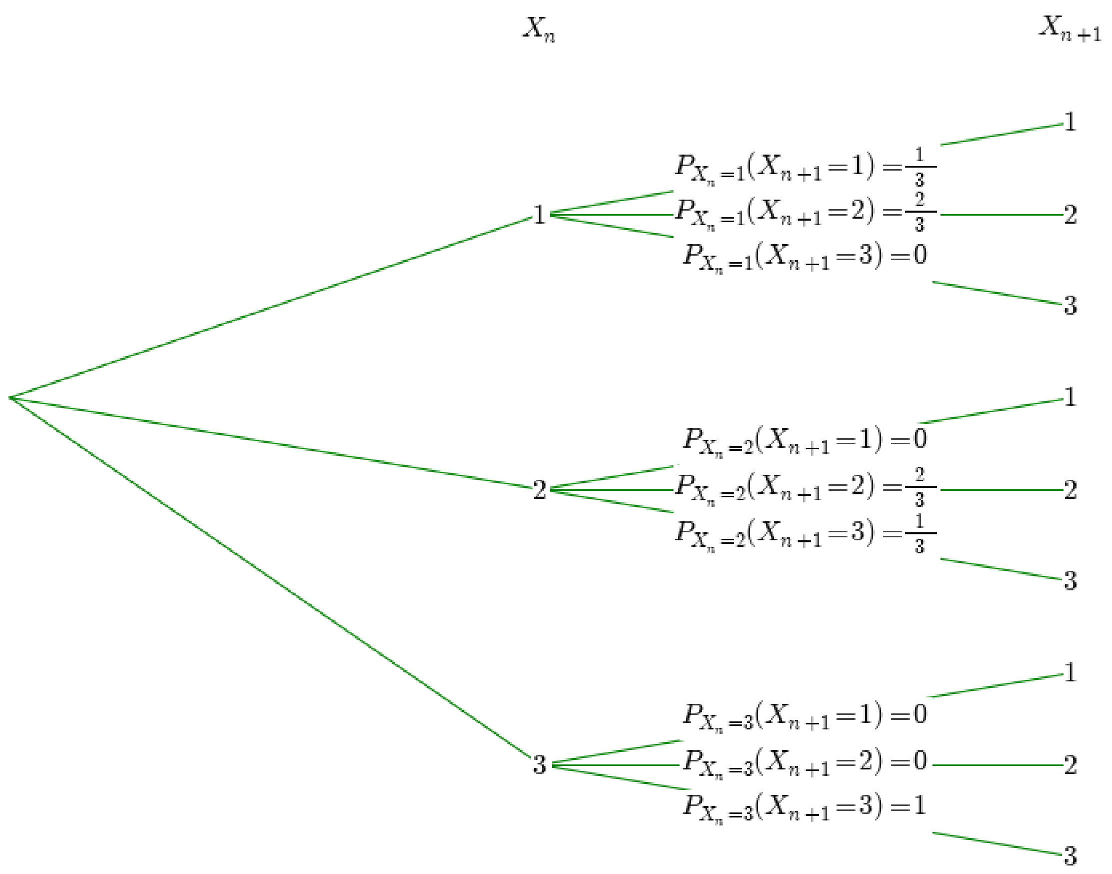
On appelle **probabilités de transition** les probabilités conditionnelles : $$p_{i,j} = P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$$ Les probabilités de transition $P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$ sont invariantes dans le temps.

<u>Conséquence :</u>

A chaque instant, le futur état probabiliste (les probabilités de X_{n+1} fournies par la matrice ligne U_{n+1}) ne dépend que de l'état probabiliste présent (les probabilités de X_n fournies par la matrice ligne U_n). On dit que le système est « sans mémoire » ou que le système a un caractère markovien[2].

<u>Exemple :</u> Galettes des rois

Les probabilités de transition se trouvent sur les branches du deuxième niveau de l'arbre de probabilité des valeurs de X_n et X_{n+1}.



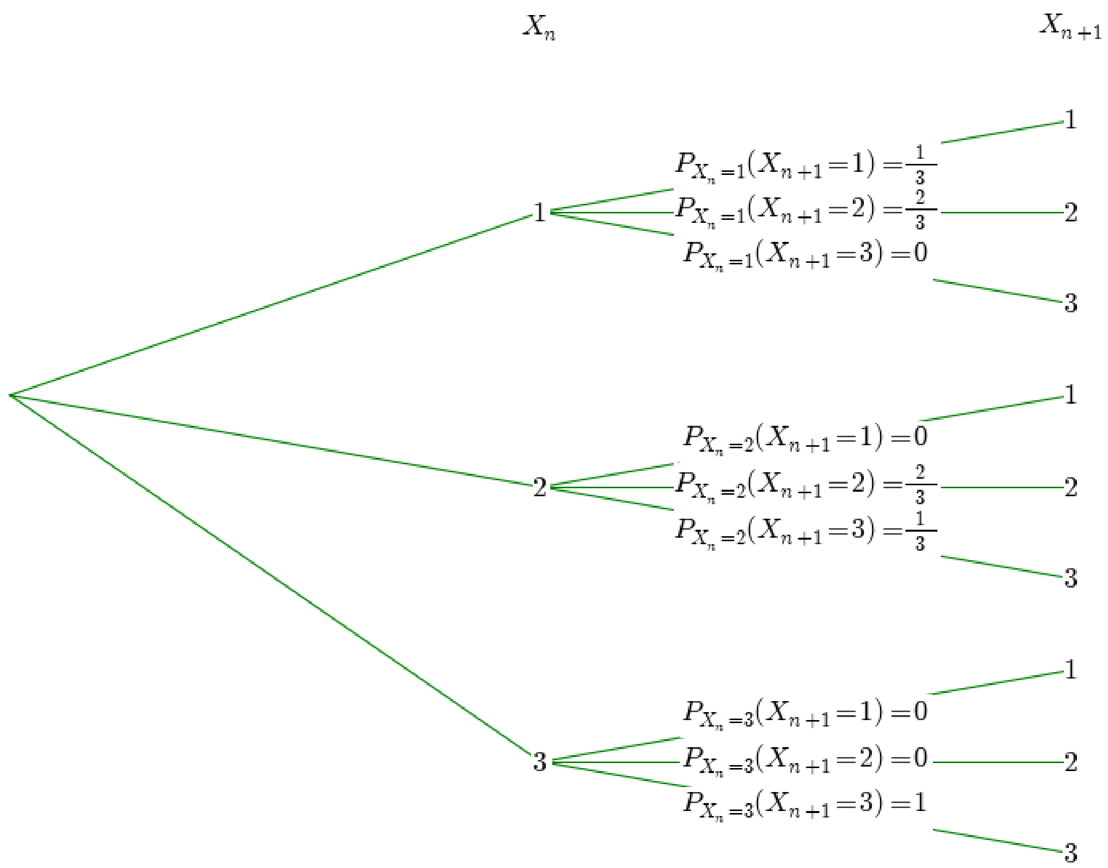
[2] **Markovien** : en hommage à **Markov** (Andreï Andreïevitch), mathématicien russe (Riazan 1856 - Petrograd 1922). En théorie des probabilités, il introduisit les chaînes d'événements dites « chaînes de Markov».

***Définition 4 :* Matrice de transition**

La matrice dont le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j est $p_{i,j}$ est appelée **matrice de transition de la marche aléatoire**[3]**.**

***Exemple :* Galettes des rois**

On a $p_{i,j} = P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$



Donc la matrice de transition de cette marche aléatoire est une matrice carrée d'ordre $k = 3$:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété de la matrice de transition

Elle est **stochastique**[4] **selon les lignes**. C'est-à-dire : 1. Tous ses éléments $p_{i,j}$ appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$. 2. La somme des éléments de chaque ligne est 1 : $\sum_{j=1}^{k} p_{i,j} = 1$

[3] L'idée de **marche aléatoire** a été introduite en 1905 par le biostatisticien **Karl Pearson** (mathématicien britannique 1857 – 1936) pour rendre compte des migrations d'une population de moustiques dans une forêt.
[4] **Stochastique** : qui est de nature aléatoire.

2.2 Graphe associé à une matrice de transition

A toute marche aléatoire, on peut associer un graphe probabiliste[5]. Ce graphe est construit de la façon suivante :

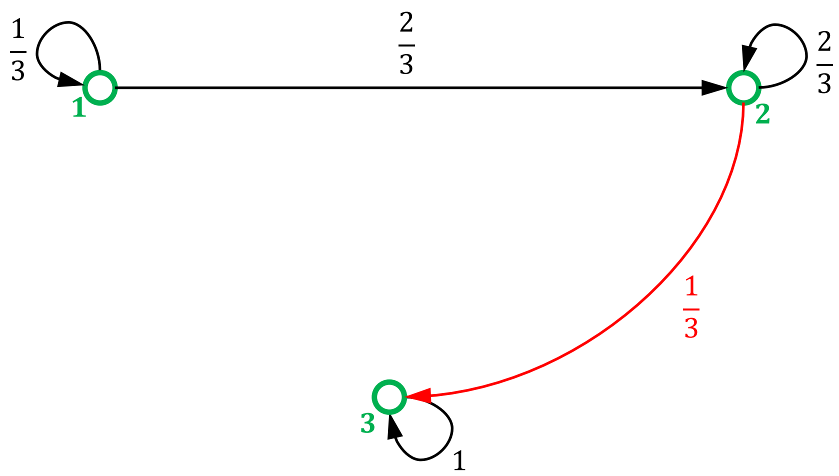
- Les k états du système sont représentés par k points : ce sont les **sommets** du graphe. On dit que le graphe est d'**ordre** k.
- Le passage d'un état du système à un autre état du système est symbolisé par un arc orienté reliant deux sommets (un sommet pouvant être relié à lui-même). Ce sont les **arêtes** du graphe. Elles sont étiquetées par les probabilités $p_{i,j}$ de passer de l'état i vers l'état j.

__Exemple :__ Nombre de sortes de fèves

Soit la matrice de transition d'une marche aléatoire à trois états :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le graphe de cette marche est ci-dessous :



__Remarques :__

- Lecture de la matrice de transition : « on entre par les lignes, on sort par les colonnes »

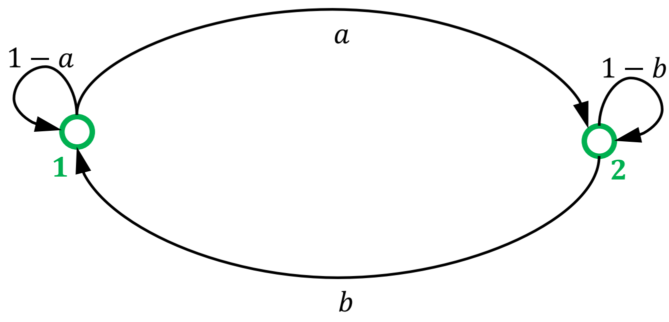
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Puisque la matrice de transition de la marche aléatoire est stochastique selon les lignes, la somme des probabilités associées aux flèches sortant d'un point du graphe est égale à 1.

[5] **Les graphes probabilistes** sont appelés aussi « chaînes de Markov ».

2.3 Marche aléatoire à deux états

Une marche aléatoire à deux états a un graphe de la forme :



avec $a \in [0\,;1]$ et $b \in [0\,;1]$.

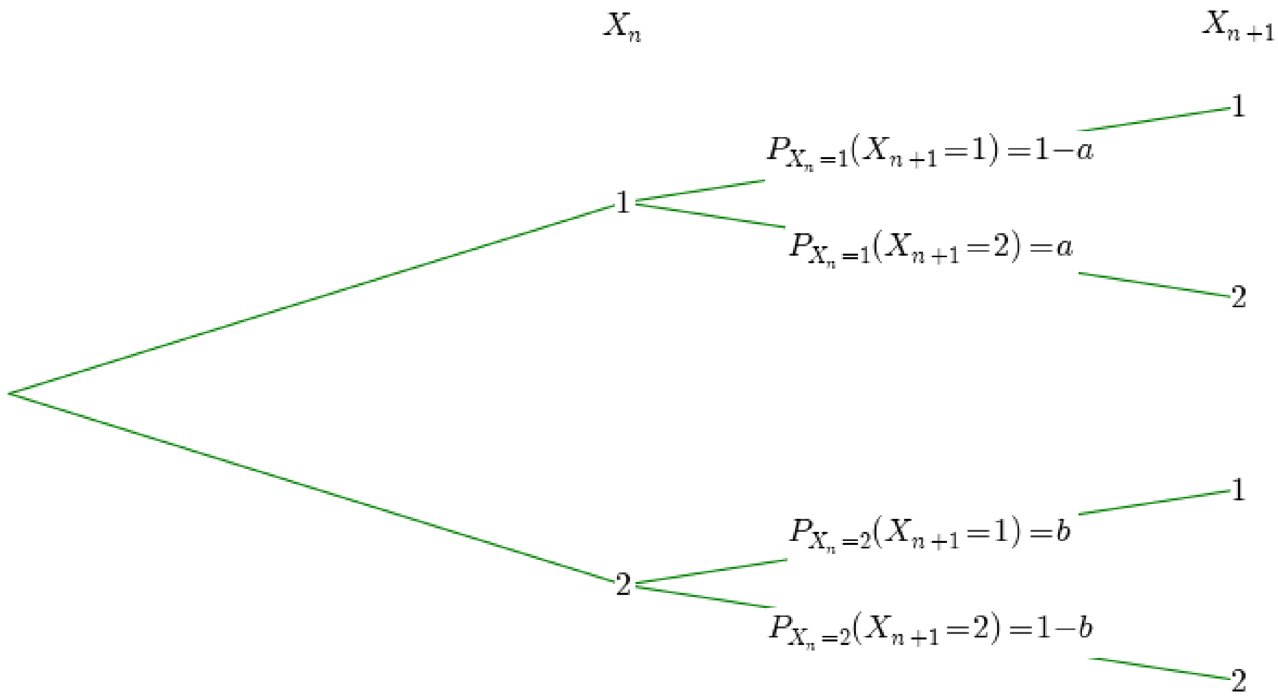
<u>Propriété 1</u>

La marche aléatoire a deux états a une matrice de transition de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

avec :

$P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = a$ et $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = b$



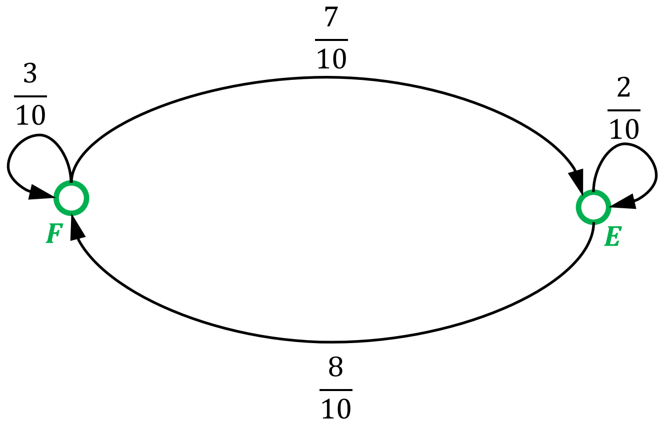
Exemple :

Un couple part en voyage chaque année. S'il voyage en France une année donnée, la probabilité pour que ce couple voyage à l'étranger l'année suivante est de $\frac{7}{10}$. S'il est allé à l'étranger une année donnée, la probabilité pour que ce couple voyage en France l'année suivante est de $\frac{8}{10}$.

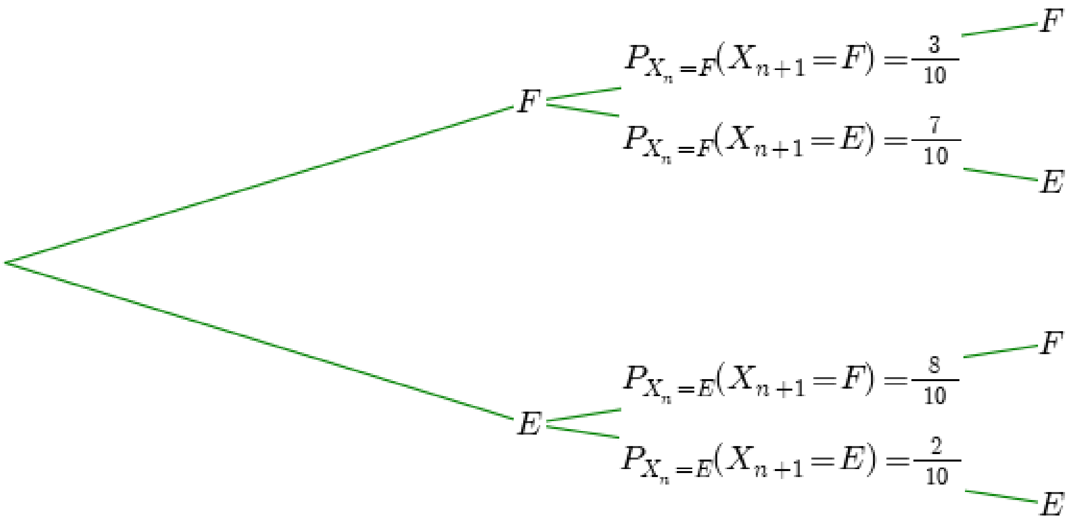
1) Représenter cette marche aléatoire à l'aide d'un graphe.
2) Ecrire la matrice de transition M de cette marche aléatoire.
3) On sait que pendant l'année $n = 0$, le couple a fait son voyage à l'étranger. Calculer la probabilité pour que le couple parte aussi à l'étranger pendant l'année $n = 5$.

Réponse :

1) Le premier état est noté F (voyage en France) ; Le deuxième est noté E (voyage à l'étranger).



2) On visualise sur un arbre, les probabilités conditionnelles de X_n et X_{n+1} :



- On en déduit la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{8}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$.

3) On sait que l'année $n = 0$, le couple a fait son voyage à l'étranger donc l'état probabiliste est donné par $U_0 = (0 \quad 1)$.

L'état probabiliste pour $n = 5$ est donné par $U_5 = U_0 \times M^5$. On trouve $U_5 = (0{,}55 \quad 0{,}45)$. Donc la probabilité pour que le couple voyage à l'étranger l'année $n = 5$ est de 0,45.

<u>Propriété 2</u>

Soit U_n la matrice ligne qui donne l'état probabiliste à l'instant n.

Si M est sa matrice de transition de la marche aléatoire, alors $U_{n+1} = U_n M$.

<u>Démonstration (dans le cas de deux états)</u>

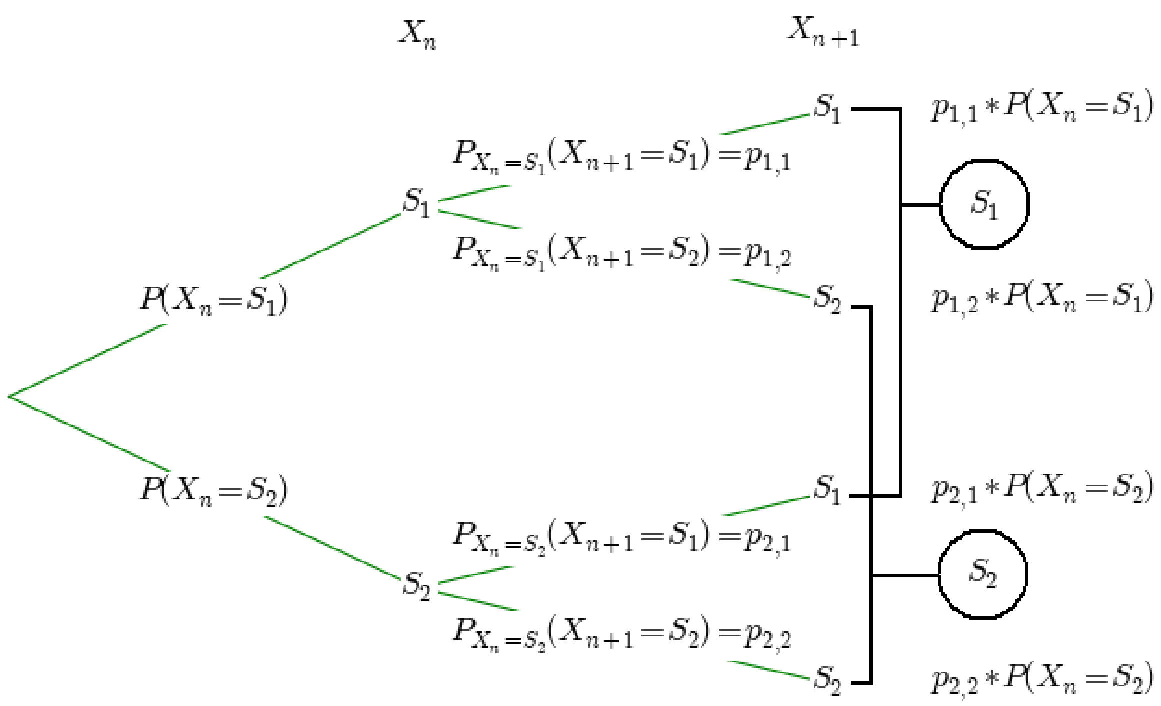
$U_0 = (P(X_0 = S_1) \quad P(X_0 = S_2))$

$U_n = (P(X_n = S_1) \quad P(X_n = S_2))$

$U_{n+1} = (P(X_{n+1} = S_1) \quad P(X_{n+1} = S_2))$

Etats S_i du système	S_1	S_2	TOTAL
$P(X_0 = S_i)$	$P(X_0 = S_1)$	$P(X_0 = S_2)$	1
…	…	…	…
$P(X_n = S_i)$	$P(X_n = S_1)$	$P(X_n = S_2)$	1
$P(X_{n+1} = S_i)$	$P(X_{n+1} = S_1)$	$P(X_{n+1} = S_2)$	1

- Posons la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$.
- On a l'arbre de probabilités conditionnelles de X_n et X_{n+1} suivant :



- Selon la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} P(X_{n+1} = S_1) = p_{1,1} \times P(X_n = S_1) + p_{2,1} \times P(X_n = S_2) \\ P(X_{n+1} = S_2) = p_{1,2} \times P(X_n = S_1) + p_{2,2} \times P(X_n = S_2) \end{cases}$$

Si on pose les matrices lignes des états probabilistes :
$U_n = (P(X_n = S_1) \quad P(X_n = S_2))$ et $U_{n+1} = (P(X_{n+1} = S_1) \quad P(X_{n+1} = S_2))$

alors le système $\begin{cases} P(X_{n+1} = S_1) = p_{1,1} \times P(X_n = S_1) + p_{2,1} \times P(X_n = S_2) \\ P(X_{n+1} = S_2) = p_{1,2} \times P(X_n = S_1) + p_{2,2} \times P(X_n = S_2) \end{cases}$ **s'écrit** $\boldsymbol{U_{n+1} = U_n M}$

$$(P(X_{n+1} = S_1) \quad P(X_{n+1} = S_2)) = (P(X_n = S_1) \quad P(X_n = S_2)) \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

Propriété 3

Soit U_n la matrice ligne qui donne l'état probabiliste à l'instant n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 M^n$.

Démonstration :

- Initialisation

M est une matrice carrée d'ordre2 donc $M^0 = I_2$

$$U_0 M^0 = U_0 I_2$$
$$U_0 M^0 = U_0$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n: $U_n = U_0 M^n$ est vraie. C'est l'hypothèse de récurrence.
D'après relation précédemment établie, on a $U_{n+1} = U_n M$.
Donc en utilisant l'hypothèse de récurrence : $U_{n+1} = U_0 M^n M$
D'où $U_{n+1} = U_0 M^{n+1}$

- Conclusion :

La matrice ligne de l'état probabiliste à l'étape n d'une marche aléatoire définie par $U_{n+1} = U_n M$, où M est la matrice de transition, est définie en fonction de n par la relation :

$$\boldsymbol{U_n = U_0 M^n}.$$

Propriété 4

On a vu au §2.1 que la matrice M de transition est stochastique selon les lignes[6]. **Les matrices lignes U_n des états probabilistes sont aussi toujours stochastiques** car, dans une loi de probabilité, toutes les probabilités sont à valeurs dans $[0\,;1]$ et le total des probabilités est égal à 1.

[6] **Matrice carrée stochastique selon les lignes** : on dit parfois tout simplement « matrice stochastique ». Dans ce cas, pour désigner une matrice carrée stochastique selon les colonnes, on dira « matrice anti stochastique ».

3 Etude asymptotique des marches aléatoires

3.1 Etude asymptotique d'une marche aléatoire à deux états

Trois propriétés

Soit une marche aléatoire à deux états, de matrice de transition M carrée d'ordre 2 **ne contenant pas de 0**.
On note U_n la matrice ligne, stochastique, de taille 2 donnant l'état de probabilité du système à l'étape n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) La suite des matrices carrées stochastiques (M_n) d'ordre 2 définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $M_n = M^n$ converge vers une matrice carrée d'ordre 2 **notée M_∞** qui est aussi stochastique et dont les lignes sont identiques.
2) La suite des matrices lignes stochastiques (U_n) de taille 2 admet une **limite notée π** qui est aussi une matrice ligne stochastique de taille 2, **indépendamment de la matrice initiale U_0**.
3) La matrice π vérifie l'égalité $\boldsymbol{\pi = \pi M}$

Vocabulaire :

La matrice limite notée $\boldsymbol{\pi}$ est la matrice de **l'état stable du système** (on dit aussi **état stationnaire**).

Exemple 1 : Reprenons l'exemple du couple partant en voyage

Un couple part en voyage chaque année. S'il est resté en France une année donnée, la probabilité pour que ce couple voyage à l'étranger l'année suivante est de $\frac{7}{10}$. S'il est allé à l'étranger une année donnée, la probabilité pour que ce couple voyage en France l'année suivante est de $\frac{8}{10}$.

1) Ecrire la matrice de transition M associée à cette marche aléatoire, en considérant les états dans l'ordre S_1 « Le couple voyage en France » et S_2 « Le couple voyage à l'étranger ».
2) Montrer que cette marche aléatoire admet un état stable.
3) Déterminer l'état stable de cette marche aléatoire.
4) Conclure.

Réponse :

1) A partir de l'arbre de probabilités conditionnelles de X_n et X_{n+1}, on déduit la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{8}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$.
2) La matrice de transition ne contient aucun 0. Donc l'état stable défini par la matrice limite stochastique $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y})$ existe.
3) Pour déterminer l'état stable, on résout : $\boldsymbol{\pi M = \pi}$ **avec** $\boldsymbol{x + y = 1}$.

$$(x \quad y) \times \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{8}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = (x \quad y), \quad avec\ x + y = 1$$

$$(0{,}3x + 0{,}8y \quad 0{,}7x + 0{,}2y) = (x \quad y), \quad avec\ x + y = 1$$

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}8y = x \\ 0{,}7x + 0{,}2y = y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0{,}7x + 0{,}8y = 0 \\ 0{,}7x - 0{,}8y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

On remarque que les deux premières équations sont équivalentes, donc le système précédent équivaut à :

$$\begin{cases} -0{,}7x + 0{,}8y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0{,}7x + 0{,}8y = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0{,}7x + 0{,}8(1 - x) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1{,}5x + 0{,}8 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-0{,}8}{-1{,}5} \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{8}{15} \\ y = 1 - \frac{8}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{8}{15} \\ y = \frac{7}{15} \end{cases}$$

L'état stable est donc donné par la matrice

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}.$$

4) <u>Conclusion :</u>

Lors d'une année donnée, après un grand nombre d'années n, la probabilité pour que le couple fasse son voyage en France **se stabilise** vers $\frac{8}{15}$.

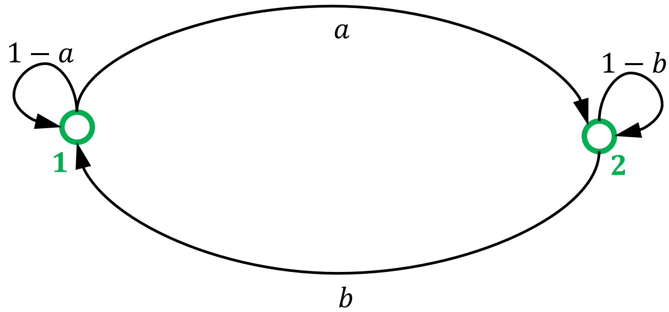
<u>Remarque :</u>

Le même état stable **sera toujours atteint, quel que soit l'état de départ**.

- Par exemple, si au départ, le couple voyage à l'étranger, alors $U_0 = (0 \quad 1)$. A la calculatrice, on obtient après 50 ans : $U_{50} = U_0 \times M^{50} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$
- Si au départ, le couple voyage en France, alors $U_0 = (1 \quad 0)$. On obtient: $U_{50} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$
- Si au départ, le couple voyage indifféremment en France ou à l'étranger, alors $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On obtient: $U_{50} = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$

<u>Démonstrations des trois propriétés</u>

On considère la marche aléatoire à deux états :



<u>Notations :</u>

- $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ est la matrice de transition.
- $U_0 = (x_0 \quad y_0)$ avec $x_0 + y_0 = 1$ est la matrice de l'état probabiliste initial.
- U_n est la matrice de l'état probabiliste à l'instant n.

1) Démonstration de : $\boxed{\text{La suite des matrices carrées stochastiques } (M_n) \text{ d'ordre 2 définie pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ par } M_n = M^n \text{ converge vers une matrice carrée d'ordre 2 } \textbf{notée } \boldsymbol{M_\infty} \text{ qui est aussi stochastique et dont les lignes sont identiques.}}$

- On donne la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix}$
- On cherche P^{-1}

$1 \times b - 1 \times -a \neq 0$ donc P est inversible.

Sa matrice inverse est $P^{-1} = \frac{1}{b+a}\begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- On diagonalise la matrice de transition M

$$D = P^{-1} \ MP$$

$$\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}M = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}M = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b-ab+ab & ba+a(1-b) \\ -1(1-a)+b & -a+1-b\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}M = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ -1+a+b & -a+1-b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -a\\ 1 & b\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ -1+a+b & -a+1-b\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b+a & -ab+ab \\ -1+a+b-a+1-b & -a(-1+a+b)+b(-a+1-b)\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b+a & 0 \\ 0 & a(1-a-b)+b(-a+1-b)\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b+a & 0 \\ 0 & (a+b)(1-a-b)\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b\end{pmatrix}$$

Donc la matrice de transition M est semblable[7] à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b\end{pmatrix}$

D'où $D = P^{-1}MP$ et donc $PDP^{-1} = M$

- Exprimons M^n à l'aide de D.

[7] Deux matrices carrées A et B sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que : $B = P^{-1}AP$

La suite des matrices carrées stochastiques (M_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $M_n = M^n$ ou encore par $M^n = (PDP^{-1})^n$

$$M^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})$$

$$M^n = PD^nP^{-1}$$

Puisque $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-a-b)^n\end{pmatrix}$, on obtient :

$$M^n = P \times \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-a-b)^n\end{pmatrix} \times P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (1-a-b)^n\end{pmatrix}$$

$$PD^n = \begin{pmatrix}1 & -a\\ 1 & b\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & -a(1-a-b)^n\\ 1 & b(1-a-b)^n\end{pmatrix}$$

puis :

$$\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$PD^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -a(1-a-b)^n\\ 1 & b(1-a-b)^n\end{pmatrix} \quad \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b+a(1-a-b)^n & a-a(1-a-b)^n\\ b-b(1-a-b)^n & a+b(1-a-b)^n\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b+a(1-a-b)^n & a-a(1-a-b)^n\\ b-b(1-a-b)^n & a+b(1-a-b)^n\end{pmatrix} \text{ avec } 0 < a < 1 \text{ et } 0 < b < 1}$$

- Etudions la convergence de la suite des matrices M^n.

On a $\begin{cases}-1 < -a < 0\\ -1 < -b < 0\end{cases}$.

En additionnant membre à membre : $-2 < -a-b < 0$, et donc $-1 < 1-a-b < 1$, d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} (1-a-b)^n = 0$$

<u>Conclusion :</u> La suite des matrices carrées stochastiques M^n converge vers $M_\infty = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}$.

M_∞ est stochastique et ses deux lignes sont identiques.

2) Démonstration de : La suite des matrices lignes stochastiques (U_n) de taille 2 admet une **limite notée π** qui est aussi une matrice ligne stochastique de taille 2, **indépendamment de la matrice initiale U_0**.

- D'après **la propriété 3** vue au §2.3, si U_n est la matrice ligne qui donne l'état probabiliste à l'instant n alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = U_0 M^n$.

Puisque la suite de matrice carrées M^n converge vers une certaine matrice M_∞ , alors la suite de matrices (U_n) converge vers $\boldsymbol{U_0 M_\infty}$. **On note π cette matrice ligne.**

- Calcul de π :

$\pi = U_0 M_\infty$

avec $U_0 = (x_0 \quad y_0)$ où x_0 et y_0 sont tels que $\begin{cases} x_0 + y_0 = 1 \\ 0 < x_0 < 1 \\ 0 < y_0 < 1 \end{cases}$

et avec $M_\infty = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\pi = \quad (x_0 \quad y_0) \qquad \frac{1}{a+b}(bx_0 + by_0 \qquad ax_0 + ay_0)$$

$$\pi = \frac{1}{a+b}(b(x_0 + y_0) \quad a(x_0 + y_0))$$

$$\pi = \frac{1}{a+b}(b \qquad a) \qquad \text{car } x_0 + y_0 = 1$$

On remarque que l'état stable ne dépend pas des valeurs x_0 et y_0 de l'état probabiliste initial.

<u>Conclusion :</u> La suite des matrices lignes stochastiques (U_n) de taille 2 admet une limite notée π avec $\pi = \left(\frac{b}{a+b} \quad \frac{a}{a+b}\right)$. Cet état stable ne dépend pas de la matrice initiale $U_0 = (x_0 \quad y_0)$.

3) Démonstration de : La matrice ligne π vérifie l'égalité $\boldsymbol{\pi M = \pi}$

- Calculons $\pi\, M$

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

$$\pi M = \quad \frac{1}{a+b}(b \qquad a) \qquad (\qquad\qquad)$$

$$\pi M = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b(1-a)+ab & ba+a(1-b) \end{pmatrix}$$

$$\pi M = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b-ab+ab & ba+a-ab \end{pmatrix}$$

$$\pi M = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix}$$

D'où $\pi = \pi M$

Conclusion : Chercher l'état stable revient à chercher la matrice $\pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ vérifiant : $\begin{cases} x+y=1 \\ \pi = \pi M \end{cases}$

Exemple 2 :

Au 1er janvier 2011, la population d'une ville se répartit de façon égale entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour des raisons familiales ou professionnelles, 10 % des propriétaires deviennent locataires tandis que 20 % des locataires deviennent propriétaires.

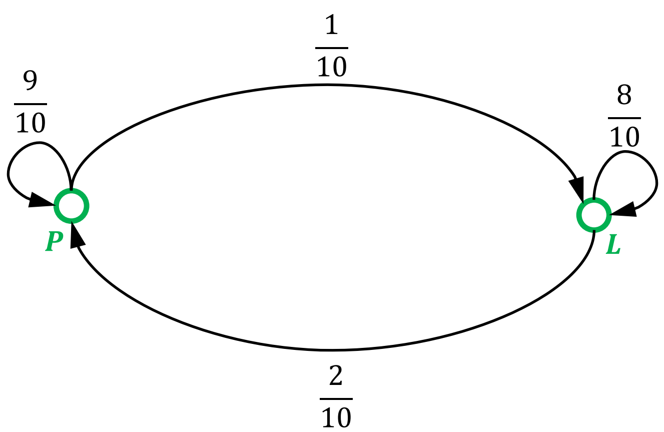
On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard soit propriétaire au 1er janvier de l'année $2011+n$ avec $n \in \mathbb{N}$, et par l_n la probabilité qu'il soit locataire.

La matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 05 \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = \begin{pmatrix} p_n & l_n \end{pmatrix}$ (avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) traduit l'état probabiliste pendant l'année $2011+n$.

1) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste, puis donner sa matrice de transition M.
2) Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?
3) A l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = 0{,}7p_n + 0{,}2$.

Réponse :

1) Le premier état du système est noté P (la personne est propriétaire) ; Le deuxième est noté L (la personne est locataire).



On en déduit la matrice de transition :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}$$

2) M ne contient aucun 0. Donc l'état stable du système existe. Chercher l'état stable revient à chercher la matrice $\pi = (x \quad y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \pi = \pi M \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ (x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (x \quad y) = (0{,}9x + 0{,}2y \quad 0{,}1x + 0{,}8y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 0{,}9x + 0{,}2y \\ y = 0{,}1x + 0{,}8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0{,}1x - 0{,}2y = 0 \\ -0{,}1x + 0{,}2y = 0 \end{cases}$$

La troisième équation étant équivalente à la deuxième, le système équivaut à

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0{,}1x - 0{,}2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} L_1 - L_2 \\ 2L_1 + L_2 \end{array}\begin{cases} x + y - (x - 2y) = 1 - 0 \\ 2(x + y) + x - 2y = 2 + 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 1 \\ 3x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u>

L'état stable du graphe est donné par la matrice $\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Au bout d'un grand nombre d'années, la répartition de la population tendra vers $\frac{2}{3}$ pour les propriétaires et $\frac{1}{3}$ pour les locataires.

3) On a la relation $P_{n+1} = P_n \times M$ avec $P_n = (p_n \quad l_n)$ **et** $\boldsymbol{p_n + l_n = 1}$

$$P_{n+1} = (p_n \quad l_n)\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix} \quad (\quad)$$

$$\begin{cases} p_n + l_n = 1 \\ (p_{n+1} \quad l_{n+1}) = (0{,}9p_n + 0{,}2l_n \quad 0{,}1p_n + 0{,}8l_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_n + l_n = 1 \\ p_{n+1} = 0{,}9\, p_n + 0{,}2l_n \\ l_{n+1} = 0{,}1p_n + 0{,}8l_n \end{cases}$$

D'où $p_{n+1} = 0{,}9\, p_n + 0{,}2(1 - p_n)$ et donc $p_{n+1} = 0{,}9\, p_n + 0{,}2 - 0{,}2p_n$, soit $\boldsymbol{p_{n+1} = 0{,}7\, p_n + 0{,}2}$.

3.2 Etude asymptotique d'une marche aléatoire à k états

3.2.1 Condition suffisante pour qu'une marche aléatoire à k états converge

Soit une marche aléatoire à k états, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$.

- S'il existe **une puissance $\boldsymbol{M^n}$** de la matrice de transition qui ne comporte **aucun $\mathbf{0}$**, alors la suite des matrices U_n converge vers la matrice ligne π de taille k qui représente l'état stable.
- La matrice π est solution de l'équation $\pi = \pi M$.

Ce résultat est admis.

Remarque :
La matrice de transition peut comporter un ou plusieurs 0. Mais si l'une des puissances de M n'en comporte aucun, alors la marche aléatoire converge vers son état stable. C'est le cas par exemple pour $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & \mathbf{0} & 0{,}2 \\ \mathbf{0} & 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}74 & 0{,}1 & 0{,}16 \\ 0{,}45 & 0{,}46 & 0{,}09 \\ 0{,}4 & 0{,}05 & 0{,}55 \end{pmatrix}$

M^2 ne comporte pas de 0,donc la marche aléatoire ayant M comme matrice de transition a un état stable $\pi = (x \quad y \quad z)$. π est solution de l'équation $\pi = \pi M$, avec $x + y + z = 1$.

3.2.2 Exemple d'étude de convergence d'une marche aléatoire à 3 états

Chaque année une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».

Au 1er janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile noté A.
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen noté B.
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile noté C.

Pour répondre aux attentes de ses adhérents et les fidéliser à long terme, une enquête est effectuée.

Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- Parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B.
- Parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau, 20 % reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C.
- Parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85% restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C »

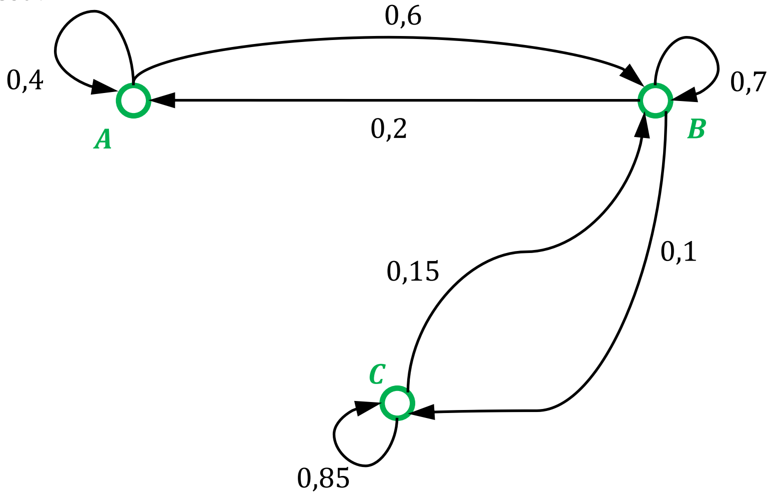
Pour entier naturel n, on note $P_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre de l'énoncé) au 1er janvier de l'année $2010 + n$. Ainsi $P_0 = (0{,}2 \quad 0{,}7 \quad 0{,}1)$.

On décide de se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir de 1er janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux adhérents et les départs).

1) Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
2) Ecrire la matrice de transition M de cette marche aléatoire.
3) Peut-on être certain que cette marche aléatoire possède un état stable ?
4) Déterminer l'état stable de cette marche aléatoire. Que peut-on en conclure pour la répartition des adhérents selon les trois niveaux ?

Réponse :

1) Le graphe est :



2) la matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

3) Calculons les premières puissances de la matrice de transition :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}28 & 0{,}66 & 0{,}06 \\ 0{,}22 & 0{,}625 & 0{,}155 \\ 0{,}03 & 0{,}2325 & 0{,}7375 \end{pmatrix}$$

Une des puissance de la matrice de transition n'a aucun 0. Donc cette marche aléatoire possède un état stable qui sera donné par la matrice ligne π.

4) La matrice $\pi = (x \quad y \quad z)$ vérifie :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \pi = \pi M \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (x \quad y \quad z) = (x \quad y \quad z) \times \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (x \quad y \quad z) = (0{,}4x + 0{,}2y \quad 0{,}6x + 0{,}7y + 0{,}15z \quad 0{,}1y + 0{,}85z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0{,}4x + 0{,}2y \\ y = 0{,}6x + 0{,}7y + 0{,}15z \\ z = 0{,}1y + 0{,}85z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0{,}4x + 0{,}2y \\ y = 0{,}6x + 0{,}7y + 0{,}15z \\ 0{,}15z = 0{,}1y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0{,}4x + 0{,}2y \\ y = 0{,}6x + 0{,}7y + 0{,}15z \\ z = \dfrac{10}{15}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0{,}4x + 0{,}2y \\ y = 0{,}6x + 0{,}7y + 0{,}15 \times \dfrac{10}{15}y \\ z = \dfrac{10}{15}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0{,}4x + 0{,}2y \\ y = 0{,}6x + 0{,}7y + 0{,}1y \\ -10y + 15z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=0{,}4x+0{,}2y \\ y=0{,}6x+0{,}8y \\ -10y+15z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0{,}6x-0{,}2y=0 \\ -0{,}6x+0{,}2y=0 \\ -10y+15z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0{,}6x-0{,}2y=0 \\ -10y+15z=0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système de 3 équations linéaires à 3 inconnues, on peut l'écrire sous forme matricielle :

$AX=B$ avec $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}6 & -0{,}2 & 0 \\ 0 & -10 & 15 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

A est une matrice carrée d'ordre 3. A la calculatrice, on trouve son déterminant $\det(A)=-18$.

$\det(A)\neq 0$, donc A est inversible. A la calculatrice, on trouve :

$$A^{-1}=\frac{1}{-18}\begin{pmatrix} -3 & -25 & 0{,}2 \\ -9 & 15 & 0{,}6 \\ -6 & 10 & -0{,}8 \end{pmatrix}$$

On peut donc calculer la matrice $X=A^{-1}B$.

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

<u>Conclusion :</u>

L'état stable de cette marche aléatoire est donné par la matrice ligne

$$\pi=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Après un grand nombre d'années la répartition des adhérents du club tendra vers :

- $\frac{1}{6}$ de l'effectif du club en niveau facile (A)
- $\frac{1}{2}$ de l'effectif du club en niveau moyen (B)
- $\frac{1}{3}$ de l'effectif du club en niveau difficile (C)

cela, quelle que soit la répartition au départ.