CHAPITRE 4 : Problèmes d’évolution.

[1 Suites de matrices colonnes *U* 2](#_Toc355544519)

[1.1 Définition d’une suite de matrices colonnes 2](#_Toc355544520)

[1.2 Suites de matrices *U* définies par une relation de la forme *Un*+1 = *AUn* + *B* 2](#_Toc355544521)

[1.3 Convergence des suites de matrices *U* définies par *Un*+1 = *AUn* + *B* 5](#_Toc355544522)

[2 Etude des marches aléatoires 6](#_Toc355544523)

[2.1 Généralités sur les marches aléatoires 6](#_Toc355544524)

[2.2 Graphe associé à une matrice de transition 9](#_Toc355544525)

[2.3 Marche aléatoire à deux états 10](#_Toc355544526)

[3 Etude asymptotique des marches aléatoires 14](#_Toc355544527)

[3.1 Etude asymptotique d’une marche aléatoire à deux états 14](#_Toc355544528)

[3.2 Etude asymptotique d’une marche aléatoire à *k* états 22](#_Toc355544529)

[3.2.1 Condition suffisante pour qu’une marche aléatoire à *k* états converge 22](#_Toc355544530)

[3.2.2 Exemple d’étude de convergence d’une marche aléatoire à 3 états 22](#_Toc355544531)

CHAPITRE 4 : Problèmes d’évolution

# Suites de matrices colonnes *U*

## Définition d’une suite de matrices colonnes

***Définition 1***

Une **suite de matrices colonnes** **de taille** () est une fonction de dans l’ensemble[[1]](#footnote-1) des matrices colonnes de taille  :

Les coefficients de la matrice sont les termes de rang des suites , ,...,.

***Exemple***

La suite de matrices colonnes de taille définie pour tout par a pour premiers termes

***Définition 2***

Une suite de matrices converge si et seulement si **toutes les suites** , ,..., formant les coefficients de cette matrice convergent.

***Exemples***

* La suite de matrices colonnes de taille définie pour tout par ne converge pas, car et définies respectivement par et divergent.
* La suite de matrices colonnes de taille définie pour tout par ne converge pas, car définie par diverge.
* La suite de matrices colonnes de taille définie pour tout par converge, car définie par converge vers et définie par converge vers

## Suites de matrices *U* définies par une relation de la forme *Un*+1 = *AUn* + *B*

***Propriété 1***

Soit une suite de matrices colonnes de taille vérifiant, pour tout entier naturel  :

, où est une matrice carrée d’ordre .

Alors, pour tout  : **.**

***Exemple***

Soit une suite de matrices colonnes de taille vérifiant, pour tout entier naturel  :

Exprimer le terme général de la suite en fonction de .

*Réponse :*

Pour tout  : .

1. Calcul de

Puisque la matrice est diagonale, on a .

Donc

1. D’où

***Démonstration***

Démontrons par récurrence la propriété dépendant de l’entier naturel .

* Initialisation

 est une matrice carrée d’ordre donc

Donc la propriété est vraie pour .

* Hérédité

Soit . On suppose que est vraie.

D’après la définition par récurrence de la suite on a .

Donc :

D’où

Donc la propriété est héréditaire.

* Conclusion :

Pour toute suite de matrices colonnes de taille définie par , où est une matrice carrée d’ordre , on a l’expression du terme général de la suite en fonction de par la relation :

***Propriété 2***

Soit une suite de matrices colonnes de taille vérifiant, pour tout entier naturel  :

où **est une** **matrice carrée** d’ordre et **une matrice colonne** de taille .

S’il existe **une matrice colonne** de taille telle que , alors on a :

En soustrayant membre à membre :

Soit la suite de matrices définie par

On a donc

Alors, d’après la propriété 1, pour tout  : **.**

Donc, puisque , on a :

***Exemple***

Soit une suite de matrices colonnes de taille vérifiant, pour tout entier naturel  :

Exprimer le terme général de la suite en fonction de .

*Réponse :*

1. On cherche une matrice colonne telle que

On isole :

Donc :

1. En soustrayant membre à membre :

 et , on a :

 en posant.

Donc avec

. .

1. Calcul de

Puisque la matrice est diagonale, on a .

D’où .

## Convergence des suites de matrices *U* définies par *Un*+1 = *AUn* + *B*

***Propriété***

Soit une suite de matrices colonnes vérifiant .

On suppose qu’il existe une matrice telle que .

1. Si alors la suite de matrices colonnes est constante. Elle converge donc.
2. Si et si la suite de matrice carrées converge, alors la suite converge aussi.

***Exemple***

Soit une suite de matrices colonnes de taille vérifiant, pour tout entier naturel  :

On a vu dans l’exemple précédent que la matrice telle que existe.

 étant diagonale, on a

 et donc les suites et convergent et donc la suite des matrices converge.

Conclusion : la suite de matrices colonnes converge.

***Démonstration***

Les matrices de la suite vérifient .

Donc d’après la propriété 2,

Si et si la suite de matrice carrées converge vers une certaine matrice , alors la suite de matrices converge vers

# Etude des marches aléatoires

## Généralités sur les marches aléatoires

Considérons un système ou processus qui évolue de l’instant à l’instant aléatoirement, avec . On suppose que le système occupe à chaque instant l’un des états : , , … , avec . On considère **la variable aléatoire**   qui donne l’état du système à l’instant .

***Exemple 1 :***

Dans les galettes des rois, se trouve une fève parmi trois fèves possibles. Au départ (instant )on a déjà mangé une galette et on a donc sorte de fève. L’état du système est .

Après avoir mangé  galettes, le système est dans l’un des états possibles : on a sorte de fève, ou sortes de fèves, ou sortes de fèves. Donc donne l’une des valeurs

***Exemple 2 :***

Une personne en état d’ébriété se trouve sur un parcours comportant 5 points. Elle part du point n°3. A chaque pas, elle effectue un pas à gauche avec la probabilité ou un pas à droite avec la probabilité . Après  pas, le système est dans l’un des états possibles : la personne est au point n°1, au point n°2, au point n°3, au point n°4 ou au point n°5. Donc donne ou .

***Définition 1 : L’état probabiliste à l’instant n***

Soit la variable aléatoire qui donne dans lequel des états du système le système est à l’instant **.**

**On appelle l’état probabiliste à l’instant** la *loi de probabilité* de .

Donc l’état probabiliste à l’instant *n* est constitué de l’ensemble des états du système et de leurs probabilités respectives. Les probabilités de sont les éléments d’une matrice ligne .

***Exemple 1 :*** ***Galettes des rois***

Etats du systèmes

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Etats du système |  sorte de fève |  sortes de fèves |  sortes de fèves | TOTAL |
|  |  |  |  |  |

***Exemple 2 :*** ***Personne en état d’ébriété***

L’état probabiliste donné par

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Etats du système | La personne est en **1** | La personne est en **2** | La personne est en **3** | La personne est en **4** | La personne est en **5** | TOTAL |
|  |  |  |  |  |  |  |

Etat probabiliste donné par

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Etats du système | La personne est en **1** | La personne est en **2** | La personne est en **3** | La personne est en **4** | La personne est en **5** | TOTAL |
|  |  |  |  |  |  |  |

Etat probabiliste donné par

***Définition 2 : Marche aléatoire***

Une **marche aléatoire** est un modèle (c'est-à-dire une représentation) d’évolution d'un système possédant des états. Ce modèle décrit l’évolution comme une succession de pas aléatoires.

La marche aléatoire est définie par :

1. L’état probabiliste initial (les probabilités de sont les éléments d’une matrice ligne ).
2. Les probabilités de transition de vers qui, contrairement à l’état probabiliste à l’instant , **ne dépendent pas** **de la valeur de .**

***Définition 3 : Probabilités de transition***

On appelle **probabilités de transition** les probabilités conditionnelles :

Les probabilités de transition sont invariantes dans le temps.

***Conséquence :***

A chaque instant, le futur état probabiliste (les probabilités de fournies par la matrice ligne ) ne dépend que de l’état probabiliste présent (les probabilités de fournies par la matrice ligne ). On dit que le système est « sans mémoire » ou que le système a un caractère markovien[[2]](#footnote-2).

***Exemple :*** ***Galettes des rois***

Les probabilités de transition se trouvent sur les branches du deuxième niveau de l’arbre de probabilité des valeurs de et .



***Définition 4 : Matrice de transition***

La matrice dont le coefficient situé à la ligne et à la colonne est est appelée **matrice de transition de la marche aléatoire[[3]](#footnote-3).**

***Exemple :*** ***Galettes des rois***

On a



Donc la matrice de transition de cette marche aléatoire est une matrice carrée d’ordre  :

***Propriété de la matrice de transition***

Elle est **stochastique[[4]](#footnote-4) selon les lignes**. C'est-à-dire :

1. Tous ses éléments appartiennent à l’intervalle .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. La somme des éléments de chaque ligne est :
 |  |

## Graphe associé à une matrice de transition

A toute marche aléatoire, on peut associer un graphe probabiliste[[5]](#footnote-5). Ce graphe est construit de la façon suivante :

* Les états du système sont représentés par points : ce sont les **sommets** du graphe. On dit que le graphe est d’**ordre** .
* Le passage d’un état du système à un autre état du système est symbolisé par un arc orienté reliant deux sommets (un sommet pouvant être relié à lui-même). Ce sont les **arêtes** du graphe. Elles sont étiquetées par les probabilités de passer de l’état vers l’état .

***Exemple :*** ***Nombre de sortes de fèves***

Soit la matrice de transition d’une marche aléatoire à trois états :

Le graphe de cette marche est ci-dessous :

***Remarques :***

* Lecture de la matrice de transition : « on entre par les lignes, on sort par les colonnes »
* Puisque la matrice de transition de la marche aléatoire est stochastique selon les lignes, la somme des probabilités associées aux flèches sortant d’un point du graphe est égale à .

## Marche aléatoire à deux états

Une marche aléatoire à deux états a un graphe de la forme :

avec et .

***Propriété 1***

La marche aléatoire a deux états a une matrice de transition de la forme :

avec :

 et



***Exemple :***

Un couple part en voyage chaque année. S’il voyage en France une année donnée, la probabilité pour que ce couple voyage à l’étranger l’année suivante est de . S’il est allé à l’étranger une année donnée, la probabilité pour que ce couple voyage en France l’année suivante est de .

1. Représenter cette marche aléatoire à l’aide d’un graphe.
2. Ecrire la matrice de transition de cette marche aléatoire.
3. On sait que pendant l’année , le couple a fait son voyage à l’étranger. Calculer la probabilité pour que le couple parte aussi à l’étranger pendant l’année .

*Réponse :*

1. Le premier état est noté (voyage en France) ; Le deuxième est noté (voyage à l’étranger).

1. On visualise sur un arbre, les probabilités conditionnelles de et  :



* On en déduit la matrice de transition .
1. On sait que l’année , le couple a fait son voyage à l’étranger donc l’état probabiliste est donné par .

L’état probabiliste pour est donné par . On trouve . Donc la probabilité pour que le couple voyage à l’étranger l’année est de .

***Propriété 2***

Soit la matrice ligne qui donne l’état probabiliste à l’instant .

Si est sa matrice de transition de la marche aléatoire, alors .

***Démonstration (dans le cas de deux états)***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Etats du système |  |  | TOTAL |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

* Posons la matrice de transition .
* On a l’arbre de probabilités conditionnelles de et suivant :



* Selon la formule des probabilités totales, on a :

Si on pose les matrices lignes des états probabilistes :

 et

**alors le système** **s’écrit**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

***Propriété 3***

Soit la matrice ligne qui donne l’état probabiliste à l’instant . Pour tout , .

***Démonstration :***

* + Initialisation

 est une matrice carrée d’ordre donc

Donc la propriété est vraie pour .

* + Hérédité

Soit . On suppose que est vraie. C’est l’hypothèse de récurrence.

D’après relation précédemment établie, on a .

Donc en utilisant l’hypothèse de récurrence :

D’où

* + Conclusion :

La matrice ligne de l’état probabiliste à l’étape d’une marche aléatoire définie par , où est la matrice de transition, est définie en fonction de par la relation :

***Propriété 4***

On a vu au §2.1 que la matrice de transition est stochastique selon les lignes[[6]](#footnote-6).

**Les matrices lignes des états probabilistes sont aussi toujours stochastiques** car, dans une loi de probabilité, toutes les probabilités sont à valeurs dans et le total des probabilités est égal à .

# Etude asymptotique des marches aléatoires

## Etude asymptotique d’une marche aléatoire à deux états

***Trois propriétés***

Soit une marche aléatoire à deux états, de matrice de transition carrée d’ordre **ne contenant pas de** .

On note la matrice ligne, stochastique, de taille donnant l’état de probabilité du système à l’étape , .

1. La suite des matrices carrées stochastiques d’ordre définie pour tout par converge vers une matrice carrée d’ordre **notée**  qui est aussi stochastique et dont les lignes sont identiques.
2. La suite des matrices lignes stochastiques de taille admet une **limite notée**  qui est aussi une matrice ligne stochastique de taille , **indépendamment de la matrice initiale** .
3. La matrice vérifie l’égalité

***Vocabulaire :***

La matrice limite notéeest la matrice de **l’état stable du système** (on dit aussi **état stationnaire**).

***Exemple 1 : Reprenons l’exemple du couple partant en voyage***

Un couple part en voyage chaque année. S’il est resté en France une année donnée, la probabilité pour que ce couple voyage à l’étranger l’année suivante est de . S’il est allé à l’étranger une année donnée, la probabilité pour que ce couple voyage en France l’année suivante est de .

1. Ecrire la matrice de transition associée à cette marche aléatoire, en considérant les états dans l’ordre « Le couple voyage en France » et « Le couple voyage à l’étranger ».
2. Montrer que cette marche aléatoire admet un état stable.
3. Déterminer l’état stable de cette marche aléatoire.
4. Conclure.

*Réponse :*

1. A partir de l’arbre de probabilités conditionnelles de et , on déduit la matrice de transition .
2. La matrice de transition ne contient aucun . Donc l’état stable défini par la matrice limite stochastique existe.
3. Pour déterminer l’état stable,on résout :  **avec .**

On remarque que les deux premières équations sont équivalentes, donc le système précédent équivaut à :

L’état stable est donc donné par la matrice

1. Conclusion :

Lors d’une année donnée, après un grand nombre d’années , la probabilité pour que le couple fasse son voyage en France **se stabilise** vers .

***Remarque :***

Le même état stable **sera toujours atteint, quel que soit l’état de départ**.

* Par exemple, si au départ, le couple voyage à l’étranger, alors . A la calculatrice, on obtient après 50 ans :
* Si au départ, le couple voyage en France, alors . On obtient:
* Si au départ, le couple voyage indifféremment en France ou à l’étranger, alors . On obtient:

***Démonstrations des trois propriétés***

On considère la marche aléatoire à deux états :

Notations :

* avec et est la matrice de transition.
* avec est la matrice de l’état probabiliste initial.
* est la matrice de l’état probabiliste à l’instant .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Démonstration de :
 | La suite des matrices carrées stochastiques d’ordre définie pour tout par converge vers une matrice carrée d’ordre **notée**  qui est aussi stochastique et dont les lignes sont identiques. |

* On donne la matrice de passage
* On cherche

 donc est inversible.

Sa matrice inverse est .

* On diagonalise la matrice de transition

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Donc la matrice de transition est semblable[[7]](#footnote-7) à la matrice

D’où et donc

* Exprimons à l’aide de .

La suite des matrices carrées stochastiques est définie pour tout par ou encore par

Puisque , on obtient :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

puis :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

, avec et

* Etudions la convergence de la suite des matrices .

On a .

En additionnant membre à membre : , et donc , d’où :

Conclusion : La suite des matrices carrées stochastiques converge vers .

 est stochastique et ses deux lignes sont identiques.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Démonstration de :
 | La suite des matrices lignes stochastiques de taille admet une **limite notée**  qui est aussi une matrice ligne stochastique de taille , **indépendamment de la matrice initiale** . |

* D’après **la propriété 3** vue au §2.3, si est la matrice ligne qui donne l’état probabiliste à l’instant alors, pour tout , on a .

Puisque la suite de matrice carrées converge vers une certaine matrice , alors la suite de matrices converge vers **. On note cette matrice ligne.**

* Calcul de  :

avec où et sont tels que

et avec

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

On remarque que l’état stable ne dépend pas des valeurs et de l’état probabiliste initial.

Conclusion : La suite des matrices lignes stochastiques de taille admet une limite notée avec . Cet état stable ne dépend pas de la matrice initiale .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Démonstration de :
 | La matrice ligne vérifie l’égalité  |

* Calculons

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

D’où

Conclusion : Chercher l’état stable revient à chercher la matrice vérifiant :

***Exemple 2 :***

Au 1er janvier 2011, la population d’une ville se répartit de façon égale entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour des raisons familiales ou professionnelles, des propriétaires deviennent locataires tandis que des locataires deviennent propriétaires.

On désigne par la probabilité qu’un habitant de la ville choisi au hasard soit propriétaire au 1er janvier de l’année avec , et par la probabilité qu’il soit locataire.

La matrice traduit l’état probabiliste initial et la matrice (avec, pour tout , ) traduit l’état probabiliste pendant l’année .

1. Représenter la situation à l’aide d’un graphe probabiliste, puis donner sa matrice de transition .
2. Déterminer l’état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?
3. A l’aide de la relation , démontrer que, pour tout , .

*Réponse :*

1. Le premier état du système est noté (la personne est propriétaire) ; Le deuxième est noté (la personne est locataire).

On en déduit la matrice de transition :

1. ne contient aucun . Donc l’état stable du système existe. Chercher l’état stable revient à chercher la matrice vérifiant :

La troisième équation étant équivalente à la deuxième, le système équivaut à

Conclusion :

L’état stable du graphe est donné par la matrice . Au bout d’un grand nombre d’années, la répartition de la population tendra vers pour les propriétaires et pour les locataires.

1. On a la relation avec **et**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

D’où et donc , soit .

## Etude asymptotique d’une marche aléatoire à *k* états

### Condition suffisante pour qu’une marche aléatoire à *k* états converge

Soit une marche aléatoire à états, .

* S’il existe **une puissance** de la matrice de transition qui ne comporte **aucun** , alors la suite des matrices converge vers la matrice ligne de taille qui représente l’état stable.
* La matrice est solution de l’équation .

Ce résultat est admis.

***Remarque :***

La matrice de transition peut comporter un ou plusieurs . Mais si l’une des puissances de n’en comporte aucun, alors la marche aléatoire converge vers son état stable. C’est le cas par exemple pour

On a

 ne comporte pas de ,donc la marche aléatoire ayant comme matrice de transition a un état stable . est solution de l’équation , avec .

### Exemple d’étude de convergence d’une marche aléatoire à 3 états

Chaque année une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».

Au 1er janvier 2010, l’association a fait son bilan :

* de ses adhérents ont choisi le niveau facile noté .
* de ses adhérents ont choisi le niveau moyen noté .
* de ses adhérents ont choisi le niveau difficile noté .

Pour répondre aux attentes de ses adhérents et les fidéliser à long terme, une enquête est effectuée.

Il s’avère que, d’une année à l’autre :

* Parmi les adhérents ayant choisi le niveau , restent à ce niveau et passent au niveau .
* Parmi les adhérents ayant choisi le niveau , restent à ce niveau, reviennent au niveau et les autres passent au niveau .
* Parmi les adhérents ayant choisi le niveau , restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau .

On note :

* l’état « l’adhérent a choisi le niveau  »
* l’état « l’adhérent a choisi le niveau  »
* l’état « l’adhérent a choisi le niveau  »

Pour entier naturel , on note la matrice ligne donnant l’état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l’ordre de l’énoncé) au 1er janvier de l’année . Ainsi .

On décide de se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l’évolution de la répartition à partir de 1er janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux adhérents et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets , et .
2. Ecrire la matrice de transition de cette marche aléatoire.
3. Peut-on être certain que cette marche aléatoire possède un état stable ?
4. Déterminer l’état stable de cette marche aléatoire. Que peut-on en conclure pour la répartition des adhérents selon les trois niveaux ?

*Réponse :*

1. Le graphe est :

1. la matrice de transition est :
2. Calculons les premières puissances de la matrice de transition :

Une des puissance de la matrice de transition n’a aucun . Donc cette marche aléatoire possède un état stable qui sera donné par la matrice ligne .

1. La matrice vérifie :

Résolvons ce système :

Pour résoudre ce système de 3 équations linéaires à 3 inconnues, on peut l’écrire sous forme matricielle :

 avec , et

 est une matrice carrée d’ordre . A la calculatrice, on trouve son déterminant .

, donc est inversible. A la calculatrice, on trouve :

On peut donc calculer la matrice .

Conclusion :

L’état stable de cette marche aléatoire est donné par la matrice ligne

Après un grand nombre d’années la répartition des adhérents du club tendra vers :

* de l’effectif du club en niveau facile (A)
* de l’effectif du club en niveau moyen (B)
* de l’effectif du club en niveau difficile (C)

cela, quelle que soit la répartition au départ.

1. Les matrices colonnes à $p$ lignes possèdent une seule colonne. On note $M\_{p,1}(R)$ l’ensemble des matrices **colonnes à** $p$ **lignes** à coefficients dans $R$. [↑](#footnote-ref-1)
2. **Markovien** : en hommage à **Markov** (Andreï Andreïevitch), mathématicien russe (Riazan 1856 - Petrograd 1922). En théorie des probabilités, il introduisit les chaînes d'événements dites « chaînes de Markov». [↑](#footnote-ref-2)
3. L'idée de **marche aléatoire** a été introduite en 1905 par le biostatisticien **Karl Pearson** (mathématicien britannique 1857 – 1936) pour rendre compte des migrations d'une population de moustiques dans une forêt. [↑](#footnote-ref-3)
4. **Stochastique** : qui est de nature aléatoire. [↑](#footnote-ref-4)
5. **Les graphes probabilistes** sont appelés aussi « chaînes de Markov ». [↑](#footnote-ref-5)
6. **Matrice carrée stochastique selon les lignes** : on dit parfois tout simplement « matrice stochastique ».

Dans ce cas, pour désigner une matrice carrée stochastique selon les colonnes, on dira « matrice anti stochastique ». [↑](#footnote-ref-6)
7. Deux [matrices carrées](http://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_carr%C3%A9e) $A$ et $B$ sont **semblables** s'il existe une [matrice inversible](http://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_inversible) $P$ telle que : $B = P^{-1}AP$ [↑](#footnote-ref-7)