

CHAPITRE 2 : Matrices.

1	Généralités sur les matrices	2
1.1	Définition d'une matrice	2
1.2	Egalité de deux matrices	2
1.3	Addition de deux matrices	2
1.4	Multiplication d'une matrice par un réel	3
2	Multiplication de deux matrices.....	4
2.1	Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne.....	4
2.2	Multiplication d'une matrice $n \times p$ par une matrice colonne.....	5
2.3	Multiplication de deux matrices carrées d'ordre n	8
3	Puissances d'une matrice	10
3.1	Matrice diagonale.....	10
3.2	Matrice unité	11
3.3	La puissance p d'une matrice carrée d'ordre n	11
4	Matrice inverse.....	13
5	Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires	19

CHAPITRE 2 : Matrices.

1 Généralités sur les matrices

1.1 Définition d'une matrice

Définition :

Une matrice A de dimension $n \times p$ (ou de format (n, p)) est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes.

Les nombres de ce tableau sont appelés les **éléments** ou les **coefficients** de la matrice. L'élément se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est noté $a_{i,j}$.

Lorsque $n = p$ on dit que la matrice est une **matrice carrée** d'ordre n .

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \pi & -3 \\ 4 & 5 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ est une matrice de dimension } 2 \times 3.$$

Une matrice carrée d'ordre 2 (c'est-à-dire de dimension 2×2) est une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Ligne 2 Colonne 1

1.2 Egalité de deux matrices

Définition :

Deux matrices A et B sont égales lorsqu'elles ont la **même dimension** et que pour chaque ligne i et chaque colonne j l'**élément $a_{i,j}$ de la matrice A est égal $b_{i,j}$ de la matrice B .**

1.3 Addition de deux matrices

Définition :

Soit A et B deux matrices ayant la même dimension.

La matrice $C = A + B$ est la matrice dont tous les éléments $c_{i,j}$ sont tels que $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \pi & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & e \end{pmatrix} \text{ alors } A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 + \sqrt{2} \\ 1 & \pi - 2 & \frac{2}{3} + e \end{pmatrix}.$$

Propriété de commutativité de l'addition de deux matrices :

Pour deux matrices quelconques A et B ayant la même dimension, on a : $A + B = B + A$.
On dit que l'addition des matrices a la propriété de **commutativité**.

Démonstration :

Tout élément $s_{i,j}$ de la matrice $A + B$ est égal à $a_{i,j} + b_{i,j}$.

Tout élément $s'_{i,j}$ de la matrice $B + A$ est égal à $b_{i,j} + a_{i,j}$.

Donc $s_{i,j} = s'_{i,j}$ pour tous les éléments des matrices $A + B$ et $B + A$. Donc ces deux matrices sont égales.

Propriété d'associativité de l'addition de deux matrices :

Pour trois matrices quelconques A , B et C ayant la même dimension : $A + (B + C) = (A + B) + C$.
On dit que l'addition des matrices a la propriété d'**associativité**.

Démonstration :

Tout élément $s_{i,j}$ de la matrice $A + (B + C)$ est égal à $a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j})$.

Tout élément $s'_{i,j}$ de la matrice $(A + B) + C$ est égal à $(a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j}$.

Donc $s_{i,j} = s'_{i,j}$ pour tous les éléments des matrices $A + (B + C)$ et $(A + B) + C$. Donc ces deux matrices sont égales.

1.4 Multiplication d'une matrice par un réel

Définition :

Soit $k \in \mathbb{R}$ et A une matrice. On note kA la matrice M dont tout élément $m_{i,j}$ est égal à $k \times a_{i,j}$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \pi & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $M = 3A$.

On a alors : $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3\sqrt{2} \\ 3 & 3\pi & 2 \end{pmatrix}$

Propriétés :

$\forall (k; k') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pour deux matrices quelconques A et B ayant la même dimension, on a :

$$k(A + B) = kA + kB$$

$$(k + k')A = kA + k'A$$

$$k(k'A) = (k \times k')A$$

Démonstration :

On vérifie que dans les trois cas, tout élément $u_{i,j}$ de la matrice située dans le membre de gauche est égal à tout élément $v_{i,j}$ de la matrice située dans le membre de droite.

Propriété :

Soit A , B et C trois matrices de même dimension et soit k un réel.

$$A = B \Leftrightarrow A + kC = B + kC$$

Démonstration :

L'équivalence des égalités des matrices résulte de l'équivalence des égalités des éléments des matrices :

$$a_{i,j} = b_{i,j} \quad \Leftrightarrow \quad a_{i,j} + kc_{i,j} = b_{i,j} + kc_{i,j}$$

Conséquence :

$$A + B = C \Leftrightarrow B = C - A$$

Démonstration :

L'égalité des matrices est conservée lorsqu'on ajoute aux deux membres $(-1)A$

$$A + B = C \Leftrightarrow A + B + (-1)A = C + (-1)A$$

$$A + B = C \Leftrightarrow A + B - A = C - A$$

$$A + B = C \Leftrightarrow B = C - A$$

2 Multiplication de deux matrices

2.1 Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition :

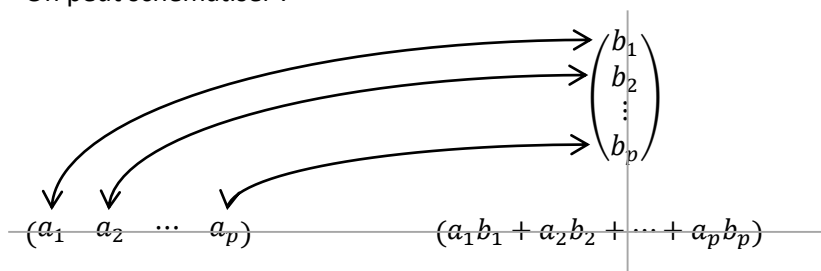
Soit la matrice ligne $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$ comportant p colonnes (on dit aussi un « vecteur ligne »)

Soit la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ comportant p lignes (on dit aussi un « vecteur colonne »)

La matrice produit $P = A \times B$ est une matrice carrée d'ordre 1.

$$P = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_pb_p)$$

On peut schématiser :



Exemple :

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 31 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = (2 \times 3 + 4 \times 2 + \sqrt{3} \times 5 + 0 \times 31)$$

$$A \times B = (6 + 8 + 5\sqrt{3} + 0)$$

$$A \times B = (14 + 5\sqrt{3})$$

2.2 Multiplication d'une matrice $n \times p$ par une matrice colonne

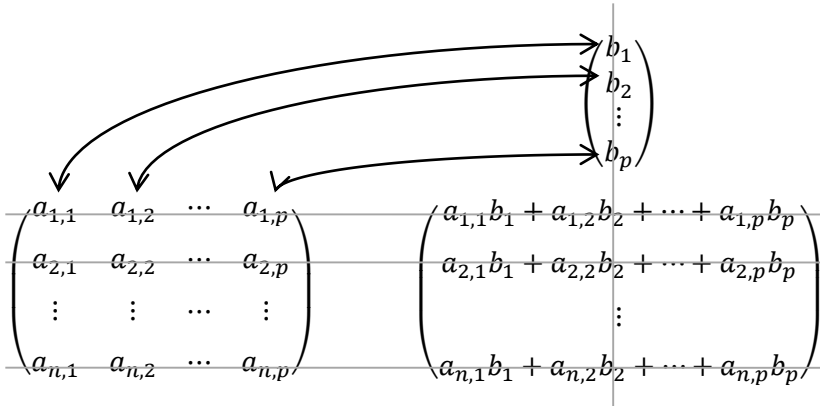
Définition :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ une matrice de dimension $n \times p$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice

colonne ayant p lignes. La matrice produit $C = A \times B$ est une matrice à n lignes et 1 colonne.

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + \cdots + a_{1,p}b_p \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + \cdots + a_{2,p}b_p \\ \vdots \\ a_{n,1}b_1 + a_{n,2}b_2 + \cdots + a_{n,p}b_p \end{pmatrix}$$

On peut schématiser :



Exemple :

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 31 \end{pmatrix}$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 4 \times 2 + \sqrt{3} \times 5 + 0 \times 31 \\ 1 \times 3 + 0 \times 2 - 1 \times 5 + 0 \times 31 \\ 1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 5 + 4 \times 31 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 6 + 8 + 5\sqrt{3} + 0 \\ 3 + 0 - 5 + 0 \\ 3 + 4 + 15 + 124 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 14 + 5\sqrt{3} \\ -2 \\ 146 \end{pmatrix}$$

- Avec la calculatrice Texas Instruments TI82 ou TI83, pour saisir les matrices :

[matrice] **EDIT** 1:[A] Entrée

Régler la dimension à 3 x 4 Entrée

Saisir la valeur de $a_{1,1}$ Entrée

Saisir les valeurs de tous les éléments $a_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4$ de la matrice A

puis :

[matrice] **EDIT** 2:[B] Entrée

Régler la dimension à 4 x 1 Entrée

Saisir la valeur de b_1 Entrée

Saisir les valeurs de tous les éléments b_i avec $1 \leq i \leq 4$ de la matrice B **[2nde]****[quitter]**

- Pour calculer le produit :

[matrice] **NOMS** 1:[A] Entrée **[x]** **[matrice]** **NOMS** 2:[B] Entrée Entrée

La matrice produit $A \times B$ s'affiche

- Pour stocker le résultat dans la matrice C :

[sto+] **[matrice]** 3:[C] Entrée Entrée

- Pour effacer une matrice :

[2nde]**[mém]** 2:Efface 5:Matrice... Entrée

Mettre la flèche en face de la matrice à effacer et appuyer sur **Suppr** **[2nde]****[quitter]**

Propriété 1

Soit A une matrice de dimension $n \times p$.

Soit V et W des matrices colonnes de dimension $p \times 1$.

Alors :

$$A(V + W) = AV + AW$$

Démonstration :

Posons $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$

- D'une part, on a $V + W = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_p + w_p \end{pmatrix}$

Et donc le produit

$$A(V + W) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(v_1 + w_1) + a_{1,2}(v_2 + w_2) + \cdots + a_{1,p}(v_p + w_p) \\ a_{2,1}(v_1 + w_1) + a_{2,2}(v_2 + w_2) + \cdots + a_{2,p}(v_p + w_p) \\ \vdots \\ a_{n,1}(v_1 + w_1) + a_{n,2}(v_2 + w_2) + \cdots + a_{n,p}(v_p + w_p) \end{pmatrix}$$

- D'autre part, on a

$$AV = \begin{pmatrix} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,p}v_p \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,p}v_p \\ \vdots \\ a_{n,1}v_1 + a_{n,2}v_2 + \cdots + a_{n,p}v_p \end{pmatrix} \text{ et } AW = \begin{pmatrix} a_{1,1}w_1 + a_{1,2}w_2 + \cdots + a_{1,p}w_p \\ a_{2,1}w_1 + a_{2,2}w_2 + \cdots + a_{2,p}w_p \\ \vdots \\ a_{n,1}w_1 + a_{n,2}w_2 + \cdots + a_{n,p}w_p \end{pmatrix}$$

et donc la somme

$$AV + AW = \begin{pmatrix} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,p}v_p + a_{1,1}w_1 + a_{1,2}w_2 + \cdots + a_{1,p}w_p \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,p}v_p + a_{2,1}w_1 + a_{2,2}w_2 + \cdots + a_{2,p}w_p \\ \vdots \\ a_{n,1}v_1 + a_{n,2}v_2 + \cdots + a_{n,p}v_p + a_{n,1}w_1 + a_{n,2}w_2 + \cdots + a_{n,p}w_p \end{pmatrix}$$

On a bien pour chaque ligne, $1 \leq i \leq n$, l'égalité

$$\begin{aligned} a_{i,1}(v_1 + w_1) + a_{i,2}(v_2 + w_2) + \cdots + a_{i,p}(v_p + w_p) \\ = a_{i,1}v_1 + a_{i,2}v_2 + \cdots + a_{i,p}v_p + a_{i,1}w_1 + a_{i,2}w_2 + \cdots + a_{i,p}w_p \end{aligned}$$

Conclusion :

$$A(V + W) = AV + AW$$

Propriété 2

Soit A une matrice de dimension $n \times p$.

Soit V et W des matrices colonnes de dimension $p \times 1$.

Alors :

$$\text{Pour tout réel } k : A(kV) = k(AV)$$

Démonstration :

Posons $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$

- D'une part, on a $kV = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \vdots \\ kv_p \end{pmatrix}$

Et donc le produit

$$A(kV) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(kv_1) + a_{1,2}(kv_2) + \cdots + a_{1,p}(kv_p) \\ a_{2,1}(kv_1) + a_{2,2}(kv_2) + \cdots + a_{2,p}(kv_p) \\ \vdots \\ a_{n,1}(kv_1) + a_{n,2}(kv_2) + \cdots + a_{n,p}(kv_p) \end{pmatrix}$$

- D'autre part, on a

$$AV = \begin{pmatrix} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,p}v_p \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,p}v_p \\ \vdots \\ a_{n,1}v_1 + a_{n,2}v_2 + \cdots + a_{n,p}v_p \end{pmatrix}$$

et donc le produit par le réel k

$$k(AV) = \begin{pmatrix} k(a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,p}v_p) \\ k(a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,p}v_p) \\ \vdots \\ k(a_{n,1}v_1 + a_{n,2}v_2 + \cdots + a_{n,p}v_p) \end{pmatrix}$$

On a bien pour chaque ligne, $1 \leq i \leq n$, l'égalité

$$a_{i,1}(kv_1) + a_{i,2}(kv_2) + \cdots + a_{i,p}(kv_p) = k(a_{i,1}v_1 + a_{i,2}v_2 + \cdots + a_{i,p}v_p)$$

Conclusion :

Pour tout réel k : $A(kV) = k(AV)$

2.3 Multiplication de deux matrices carrées d'ordre n

Définition :

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n .

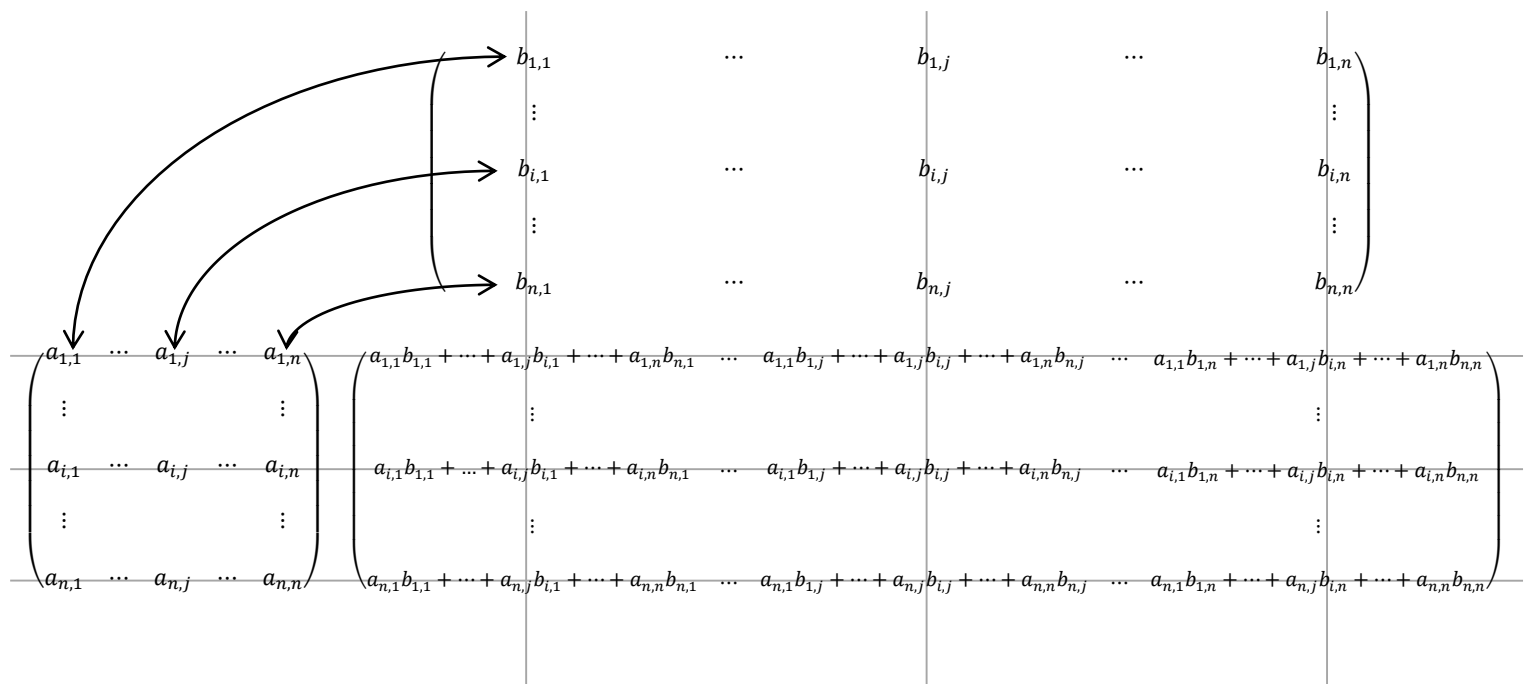
La matrice $C = A \times B$, notée aussi $C = AB$ **est une matrice carrée** d'ordre n .

Si $L_1, L_2, \dots, L_n$ sont les n lignes de la matrice A

et si $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les n colonnes de la matrice B ,

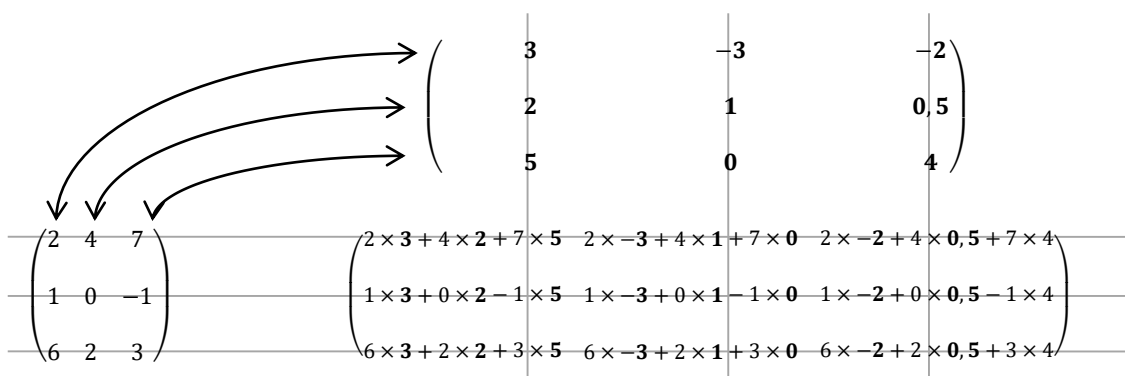
Alors l'élément $c_{i,j}$ de la matrice $C = A \times B$ est égal à l'unique élément de la matrice $[L_i] \times [C_j]$ où

- $[L_i]$ désigne la matrice ligne formée par la i ème ligne de A
- $[C_j]$ désigne la matrice colonne formée par la j ème colonne de B



Exemple :

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 0,5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.



$$A \times B = \begin{pmatrix} 49 & -2 & 26 \\ -2 & -3 & -6 \\ 37 & -16 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

On peut généraliser la notion de produit matriciel $A \times B$ à certains cas de matrices non carrées lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Propriétés

- Soit un réel k et A, B et C des matrices carrées d'ordre n . Alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

Le produit matriciel a la propriété d'**associativité**.

- Pour tout réel k : $A(kB) = k(AB) = (kA)B$

Le produit matriciel est **compatible** avec la multiplication par un réel.

- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Le produit matriciel a la propriété de **distributivité à gauche** par rapport à l'addition matricielle.

- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

Le produit matriciel a la propriété de **distributivité à droite** par rapport à l'addition matricielle.

-  $A \times B \neq B \times A$

Le produit matriciel n'a pas la propriété de **commutativité**.

3 Puissances d'une matrice

3.1 Matrice diagonale

Définition 1 :

On appelle diagonale (ou diagonale principale) d'une matrice A les éléments $a_{i,i}$ de la matrice ayant un indice de ligne égal à l'indice de colonne.

Exemples :

Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{pmatrix}$$

Leurs éléments diagonaux sont les $a_{i,i}, b_{i,i}, c_{i,i}$.

Définition 2 :

On appelle **matrice diagonale** une **matrice carrée** dont les éléments non diagonaux sont tous nuls.

Exemple :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \frac{\pi}{5} \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale.}$$

Ses éléments diagonaux sont $d_{1,1} = 1, d_{2,2} = \cos \frac{\pi}{5}, d_{3,3} = -\sin \frac{\pi}{5}$.

3.2 Matrice unité

Définition :

On appelle **matrice unité** une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.

On note I_n la matrice unité d'ordre n .

Exemples :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$.

On a :

	$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a \times \frac{1}{a} + 0 \times 0 & a \times 0 + 0 \times \frac{1}{b} \\ 0 \times \frac{1}{a} + b \times 0 & 0 \times 0 + b \times \frac{1}{b} \end{pmatrix}$	$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A \times B = I_2$

Et on a aussi :

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \times a + 0 \times 0 & \frac{1}{a} \times 0 + 0 \times b \\ 0 \times a + \frac{1}{b} \times 0 & 0 \times 0 + \frac{1}{b} \times b \end{pmatrix}$	$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$B \times A = I_2$

Propriété :

Pour toute matrice carrée d'ordre n , on a $AI_n = I_n A = A$.

3.3 La puissance p d'une matrice carrée d'ordre n

Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit p un entier naturel non nul.

On définit A^p la matrice telle que $A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p \text{ fois}}$. Par convention $A^0 = I_n$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = AA$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 & 1 \times 2 + 2 \times 4 \\ 3 \times 1 + 4 \times 3 & 3 \times 2 + 4 \times 4 \end{pmatrix}$	$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$	

$$A^3 = AA^2$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

On peut aussi calculer A^3 ainsi :

$$A^3 = A^2A$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}$$

Propriété :

Soit D une matrice diagonale d'ordre n et $d_{1,1}, d_{2,2}, \dots, d_{n,n}$ ses éléments diagonaux.

Pour tout entier $p \geq 1$, la matrice D^p est une matrice diagonale et ses éléments diagonaux sont respectivement $d_{1,1}^p, d_{2,2}^p, \dots, d_{n,n}^p$

Démonstration pour les matrices diagonales d'ordre 2 de la forme $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$:

Montrons par récurrence que la propriété $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- Initialisation :

Pour $n = 1$, on a :

$$D^1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Donc :

$$D^1 = \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & b^1 \end{pmatrix}$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$

- Héritéité :

Supposons que pour un entier naturel non nul k , on ait $D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$

Calculons D^{k+1} :

$$D^{k+1} = D^k D$$

$$D^{k+1} = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a^k \times a + 0 \times 0 & a^k \times 0 + 0 \times b \\ 0 \times a + b^k \times 0 & 0 \times 0 + b^k \times b \end{pmatrix}$	$D^{k+1} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix}$	

La propriété est donc vraie pour $n = k + 1$ si on suppose qu'elle est vraie pour $n = k$.

- Conclusion :

La propriété $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

Exemples :

Si : $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors $D^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$ etc.

4 Matrice inverse

Définition :

Soit A une matrice **carrée** d'ordre n .

S'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$, alors on dit que la matrice A est **inversible**.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$. Effectuons le produit matriciel AB :

	$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \times 0,8 + 1 \times -0,6 & 2 \times -0,2 + 1 \times 0,4 \\ 3 \times 0,8 + 4 \times -0,6 & 3 \times -0,2 + 4 \times 0,4 \end{pmatrix}$	$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$AB = I_2$

Et effectuons le produit BA :

	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,8 \times 2 - 0,2 \times 3 & 0,8 \times 1 - 0,2 \times 4 \\ -0,6 \times 2 + 0,4 \times 3 & -0,6 \times 1 + 0,4 \times 4 \end{pmatrix}$	$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$BA = I_2$

Conclusion : La matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible.

Propriété :

Il existe des matrices carrées non nulles, **non inversibles**.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$. Montrons par l'absurde que A n'est pas inversible.

Calculons d'abord le produit de la matrice A par deux matrices colonnes différentes :

- Premier produit : $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 10 \times 0 \\ 4 \times 1 + 20 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Deuxième produit : $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \times 0 + 10 \times 0,2 \\ 4 \times 0 + 20 \times 0,2 \end{pmatrix} & A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Supposons que A soit inversible et donc qu'il existe une matrice B telle que $BA = I_2$.

Les deux égalités calculées plus haut peuvent être multipliées membre à membre par la matrice B .
On obtient :

$$BA \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$I_2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Par propriété de la matrice unité I_2 , on a :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

D'où on déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix}$. C'est absurde. Donc la matrice A **n'a pas de matrice inverse** B .

Propriété (admise) :

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

Si B est une matrice carrée d'ordre n telle que $AB = I_n$ (I_n étant la matrice unité d'ordre n)
alors $BA = I_n$.

Réciproquement :

Si B est une matrice carrée d'ordre n telle que $BA = I_n$ (I_n étant la matrice unité d'ordre n)
alors $AB = I_n$.

Ce résultat n'est pas évident car on a vu que dans le cas général, **le produit matriciel n'est pas commutatif**.

Propriété :

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

- Si B est une matrice telle que $AB = I_n$
- Si C est une matrice telle que $CA = I_n$

Alors $B = C$

Conséquence de cette propriété :

L'égalité $B = C$ montre que, si elle existe, alors la matrice inverse de A est unique. Car si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver deux matrices inverses distinctes B et C vérifiant à la fois $AB = I_n$ et $CA = I_n$. Cette propriété peut s'énoncer : « une matrice inversible A a une **unique matrice inverse** ».

Notation : Si A est inversible, on note A^{-1} l'unique matrice inverse de A . Elle vérifie les relations $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Démonstration de la propriété :

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Supposons que A soit inversible. Donc il existe au moins une matrice B telle que :

$$AB = I_n$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par une matrice C telle que $CA = I_n$ on obtient :

$$CAB = CI_n$$

$$I_n B = C$$

$$B = C$$

L'égalité des matrices B et C est ainsi démontrée.

Exemple :

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$ et deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Si $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ alors pour toute matrice carrée B d'ordre 2, on a l'égalité :

$$B \times A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Si A est inversible, alors elle possède une unique matrice inverse A^{-1} avec laquelle on peut écrire :

$$A^{-1} \times A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$I_2 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Ecrivons le produit matriciel :

Si $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 16 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 11x + 2y \\ 16x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, ce qui peut s'écrire, d'après la définition de l'égalité des matrices, comme un système d'équations :

$$\begin{cases} 11x + 2y = u \\ 16x + 3y = v \end{cases}$$

On peut isoler x et y :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 11x + 2y = u \\ 16x + 3y = v \end{cases}$$

On élimine y dans la deuxième équation :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ 3L_1 - 2L_2 \end{array} \begin{cases} 11x + 2y = u \\ 3(11x + 2y) - 2(16x + 3y) = 3(u) - 2(v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x + 2y = u \\ 33x + 6y - 32x - 6y = 3u - 2v \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 11x + 2y = u \\ x = 3u - 2v \end{cases}$$

On élimine x dans la première équation :

$$\begin{array}{l} L_1 - 11L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} (11x + 2y) - 11(x) = (u) - 11(3u - 2v) \\ x = 3u - 2v \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = u - 33u + 22v \\ x = 3u - 2v \end{cases}$$

$$L_1 \begin{cases} 2y = -32u + 22v \\ x = 3u - 2v \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}L_1 \begin{cases} y = -16u + 11v \\ x = 3u - 2v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3u - 2v \\ y = -16u + 11v \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -16 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Or, on avait écrit que, si $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, elle possède une unique matrice inverse A^{-1} avec laquelle on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Conclusion :

Puisque $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -16 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$,

A est inversible et son unique matrice inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -16 & 11 \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2, non nulle.

A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$

Démonstration :

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Effectuons le produit AB :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} a \times d - c \times b & a \times -b + b \times a \\ c \times d - d \times c & c \times -b + d \times a \end{pmatrix} \end{array} \quad AB = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

Ce qui s'écrit $AB = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou encore $AB = \delta I_2$ en posant $\delta = ad - bc$.

- Si $\delta \neq 0$ alors on peut multiplier les deux membres par $\frac{1}{\delta}$ ce qui donne : $A \times \frac{1}{\delta} B = I_2$.

Donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est $\frac{1}{\delta} B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Si $\delta = 0$ alors $AB = \delta I_2$ s'écrit $AB = 0 \times I_2$ c'est-à-dire $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démontrons par l'absurde que A n'est pas inversible dans ce cas.

Si A est inversible alors elle a une matrice inverse C et on peut écrire :

$$CA = I_2$$

$$CAB = B$$

Par ailleurs, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc

$$C \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Ce résultat est contradictoire avec l'hypothèse $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2, non nulle.

Conclusion :

La matrice carrée non nulle A , d'ordre 2 est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Lorsque A est inversible, sa matrice inverse est $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

5 Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires

Définition :

Un système d'équations linéaires est un système d'équations dans lesquelles les inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ n'apparaissent jamais multipliées par une autre inconnue ni par elles-mêmes. C'est-à-dire qu'il n'y a jamais de terme du type $x_1 \times x_2$ ni du type x_1^2, x_1^3 etc.

En conséquence, un système de n équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle $AX = B$

en posant les matrices :

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ pour les constantes
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ pour les inconnues.

Exemple :

Le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

S'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit un système linéaire de n équations à n inconnues ayant pour écriture matricielle $AX = B$.

Si A est une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne à n lignes,

alors ce système possède une solution unique $X = A^{-1}B$

Démonstration :

Soit le système d'équation matricielle :

$$AX = B$$

Si A est inversible, alors il existe une unique matrice A^{-1} telle que $A^{-1}A = I_n$

En multipliant à gauche les membres par A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$I_n X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Rappel : le système :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

s'écrit avec les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exemple 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

Réponse :

- Le système a-t-il une unique solution ?

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \text{ équivaut à :}$$

$$AX = B \quad \text{avec : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée d'ordre 2. Pour savoir si elle est inversible, calculons

$$ad - bc = 1 \times 2 - 3 \times 2 \quad (\text{le réel } \det(A) = ad - bc \text{ est appelé } \mathbf{déterminant}^1 \text{ de la matrice } A)$$

$$ad - bc = -4$$

$$ad - bc \neq 0$$

Donc A est inversible et donc le système a un unique couple $(x ; y)$ solution.

- Quelle est cette solution ?

Pour trouver la matrice X , on fait le produit $A^{-1}B$.

Pour calculer à la calculatrice A^{-1} :

- Appuyer sur $\boxed{\text{matrice}}$
- Choisir 1 : [A]

Puis appuyer sur $\boxed{X^{-1}}$

$$\text{On trouve : } A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.75 & -0.25 \end{pmatrix}$$

- $AX = B$ équivaut successivement à
- $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$
- $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$
- $I_2X = A^{-1}B$
- $X = A^{-1}B$

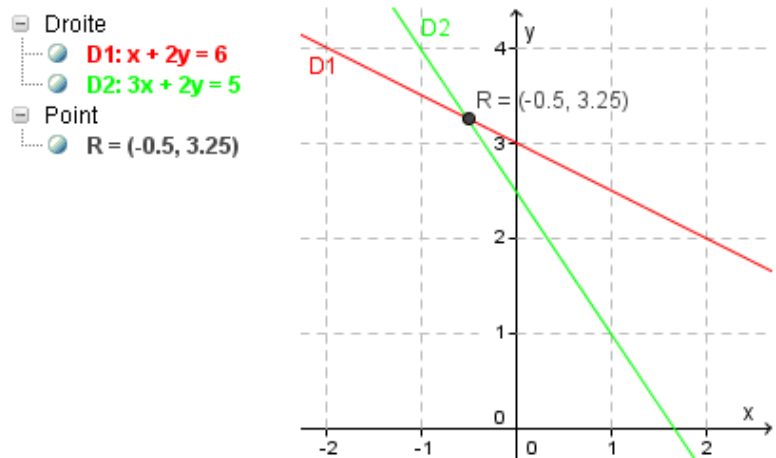
$$\text{La calculatrice donne } A^{-1}B = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 3.25 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

Le système $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ d'inconnues x et y a un unique couple solution : $\mathcal{S} = \{(-0.5 ; 3.25)\}$

Interprétation graphique :

Les droites D_1 d'équation $x + 2y = 6$ et D_2 d'équation $3x + 2y = 5$ se coupent en un point R de coordonnées $(-0.5 ; 3.25)$



¹ Dans le menu MATH du module « matrice » de la calculatrice, figure la commande **det** pour calculer le déterminant d'une matrice carrée.

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} -8x - 7y - 4z = -32 \\ 4x + y + 12z = 16 \\ -4x - 11y - 12z = -56 \end{cases}$$

Réponse :

- Le système a-t-il une unique solution ?

$$\begin{cases} -8x - 7y - 4z = -32 \\ 4x + y + 12z = 16 \\ -4x - 11y - 12z = -56 \end{cases} \quad \text{équivalent à :}$$

$$AX = B \quad \text{avec : } A = \begin{pmatrix} -8 & -7 & -4 \\ 4 & 1 & 12 \\ -4 & -11 & -12 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -56 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée d'ordre 3. Pour savoir si elle est inversible, on calcule le déterminant de A

$$\det(A) = -800$$

$$\det(A) \neq 0$$

Donc A est inversible et donc le système a un unique triplet $(x ; y ; z)$ solution.

- Quelle est cette solution ?

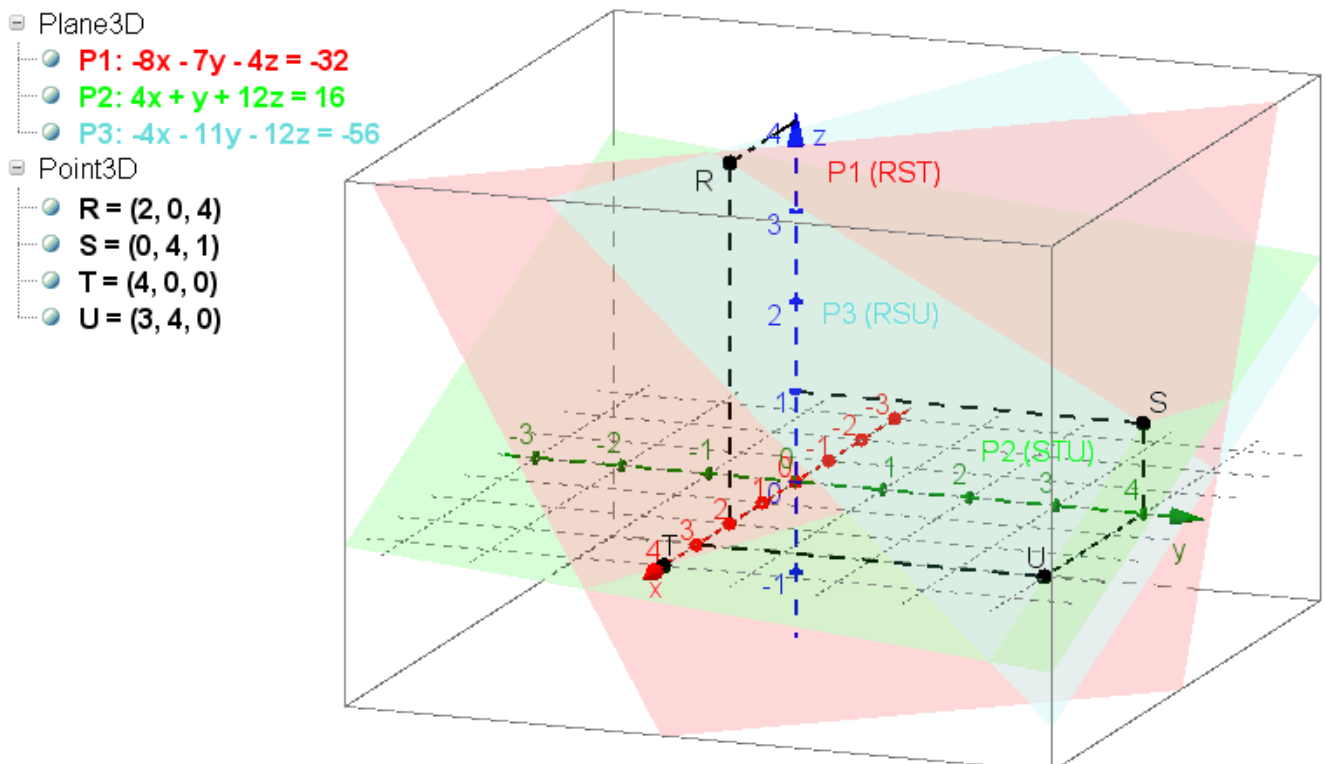
Pour trouver la matrice X , on fait le produit $A^{-1}B$. La calculatrice donne $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Conclusion :

$$\text{Le système } \begin{cases} -8x - 7y - 4z = -32 \\ 4x + y + 12z = 16 \\ -4x - 11y - 12z = -56 \end{cases} \text{ d'inconnues } x, y \text{ et } z \text{ a un unique triplet solution : } S = \{(0 ; 4 ; 1)\}$$

Interprétation graphique :

Les plans P_1 d'équation $-8x - 7y - 4z = -32$, P_2 d'équation $4x + y + 12z = 16$ et P_3 d'équation $-4x - 11y - 12z = -56$ ont comme intersection l'ensemble $\{S\}$ avec S de coordonnées $(0 ; 4 ; 1)$



Propriété : (admise)

Soit un système linéaire de n équations à n inconnues ayant pour écriture matricielle $AX = B$.

Si A est une matrice carrée non inversible d'ordre n et B une matrice colonne à n lignes,

alors ce système possède soit zéro solution soit une infinité.

Exemple 1 :

Le système :
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

a-t-il une unique solution ?

Réponse :

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

équivalent successivement à :

$$AX = B \quad \text{avec : } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée d'ordre 2. Pour savoir si elle est inversible, on calcule $\det(A) = ad - bc$.

$$ad - bc = 1 \times 2 - 1 \times 2$$

$$ad - bc = 0$$

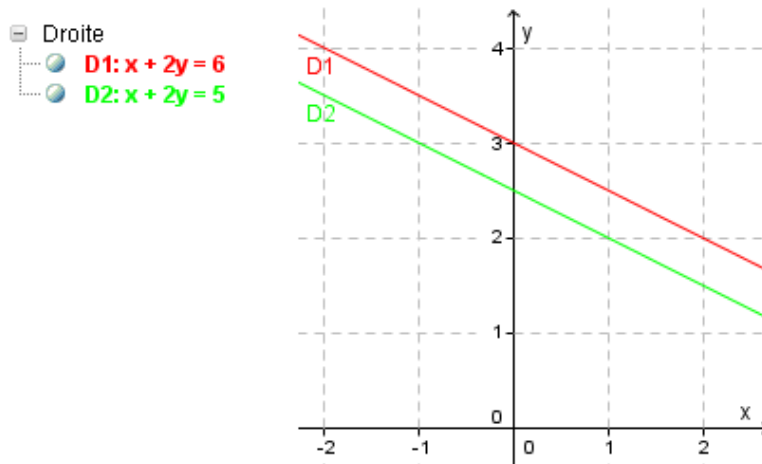
Donc A n'est pas inversible.

On ne peut donc pas calculer la matrice $X = A^{-1}B$

Conclusion : le système $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ d'inconnues x et y n'a donc pas un unique couple solution :

Interprétation graphique :

Les droites D_1 d'équation $x + 2y = 6$ et D_2 d'équation $x + 2y = 5$ ne se coupent en un point.



Exemple 2 :

Le système :
$$\begin{cases} -3y - 4z = -16 \\ 4x - y - 4z = -8 \\ 4x + 11y + 12z = 56 \end{cases}$$
 a-t-il une unique solution ?

Réponse :

$$\begin{cases} -3y - 4z = -16 \\ 4x - y - 4z = -8 \\ 4x + 11y + 12z = 56 \end{cases}$$
 équivaut successivement à :

$$AX = B \quad \text{avec : } A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 4 & -1 & -4 \\ 4 & 11 & 12 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 56 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée d'ordre 3. Pour savoir si elle est inversible, on calcule son déterminant.

$$\det(A) = 0.$$

Donc A n'est pas inversible.

On ne peut donc pas calculer la matrice $X = A^{-1}B$

Conclusion :

Le système
$$\begin{cases} -3y - 4z = -16 \\ 4x - y - 4z = -8 \\ 4x + 11y + 12z = 56 \end{cases}$$
 d'inconnues x , y et z n'a donc pas un unique triplet solution.

Interprétation graphique :

Les plans P_1 d'équation $-3y - 4z = -16$, P_2 d'équation $4x - y - 4z = -8$ et P_3 d'équation $4x + 11y + 12z = 56$ ne se coupent pas en un point.

