CHAPITRE 2 : Matrices.

[1 Généralités sur les matrices 2](#_Toc406079865)

[1.1 Définition d’une matrice 2](#_Toc406079866)

[1.2 Egalité de deux matrices 2](#_Toc406079867)

[1.3 Addition de deux matrices 2](#_Toc406079868)

[1.4 Multiplication d’une matrice par un réel 3](#_Toc406079869)

[2 Multiplication de deux matrices 4](#_Toc406079870)

[2.1 Multiplication d’une matrice ligne par une matrice colonne 4](#_Toc406079871)

[2.2 Multiplication d’une matrice *n* x *p* par une matrice colonne 5](#_Toc406079872)

[2.3 Multiplication de deux matrices carrées d’ordre *n* 8](#_Toc406079873)

[3 Puissances d’une matrice 10](#_Toc406079874)

[3.1 Matrice diagonale 10](#_Toc406079875)

[3.2 Matrice unité 11](#_Toc406079876)

[3.3 La puissance *p* d’une matrice carrée d’ordre *n* 11](#_Toc406079877)

[4 Matrice inverse 13](#_Toc406079878)

[5 Application à la résolution de systèmes d’équations linéaires 19](#_Toc406079879)

CHAPITRE 2 : Matrices.

# Généralités sur les matrices

## Définition d’une matrice

***Définition :***

Une matrice de dimension (ou de format ) est un tableau de nombres comportant  lignes et colonnes.

Les nombres de ce tableau sont appelés les **éléments** ou les **coefficients** de la matrice. L’élément se trouvant à l’intersection de la ligne et de la colonne est noté .

Lorsque on dit que la matrice est une **matrice carrée** d’ordre  **.**

***Exemple :***

|  |  |
| --- | --- |
|  | est une matrice de dimension . |

Une matrice carrée d’ordre (c'est-à-dire de dimension ) est une matrice de la forme

Ligne 2

Colonne 1

## Egalité de deux matrices

***Définition :***

Deux matrices et sont égales lorsqu’elles ont **la même dimension** et que pour chaque ligne et chaque colonne **l’élément de la matrice est égal de la matrice** .

## Addition de deux matrices

***Définition :***

Soit et deux matrices ayant la même dimension.

La matrice est la matrice dont tous les éléments sont tels que .

***Exemple :***

Si et alors .

***Propriété de commutativité de l’addition de deux matrices :***

Pour deux matrices quelconques et ayant la même dimension, on a : .
On dit que l’addition des matrices a la propriété de **commutativité**.

***Démonstration :***

Tout élément de la matrice est égal à .

Tout élément de la matrice est égal à .

Donc pour tous les éléments des matrices et . Donc ces deux matrices sont égales.

***Propriété d’associativité de l’addition de deux matrices :***

Pour trois matrices quelconques , et ayant la même dimension  : .
On dit que l’addition des matrices a la propriété d’**associativité**.

***Démonstration :***

Tout élément de la matrice est égal à .

Tout élément de la matrice est égal à .

Donc pour tous les éléments des matrices et . Donc ces deux matrices sont égales.

## Multiplication d’une matrice par un réel

***Définition :***

Soit et une matrice. On note la matrice dont tout élément est égal à .

***Exemple :***

Soit et .

On a alors :

***Propriétés :***

, pour deux matrices quelconques et ayant la même dimension, on a :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

***Démonstration :***

On vérifie que dans les trois cas, tout élément de la matrice située dans le membre de gauche est égal à tout élément de la matrice située dans le membre de droite.

***Propriété :***

Soit , et trois matrices de même dimension et soit un réel.

***Démonstration :***

L’équivalence des égalités des matrices résulte de l’équivalence des égalités des éléments des matrices :

***Conséquence :***

***Démonstration :***

L’égalité des matrices est conservée lorsqu’on ajoute aux deux membres

# Multiplication de deux matrices

## Multiplication d’une matrice ligne par une matrice colonne

***Définition :***

Soit la matrice ligne comportant colonnes
(on dit aussi un « vecteur ligne »)

Soit la matrice colonne comportant lignes (on dit aussi un « vecteur colonne »)

La matrice produit est une matrice carrée d’ordre 1.

On peut schématiser :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

***Exemple :***

Soit les matrices et .

## Multiplication d’une matrice *n* x *p* par une matrice colonne

***Définition :***

***Soit*** une matrice de dimension et une matrice colonne ayant lignes. La matrice produit est une matrice à lignes et 1 colonne.

On peut schématiser :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

***Exemple :***

Soit les matrices et .

* Avec la calculatrice Texas Instruments TI82 ou TI83, pour saisir les matrices :

 **EDIT** 1 :[A] Entrée

Régler la dimension à 3 x 4 Entrée

Saisir la valeur de Entrée

Saisir les valeurs de tous les éléments de la matrice

puis :

 EDIT 2 :[B] Entrée

Régler la dimension à 4 x 1 Entrée

Saisir la valeur de Entrée

Saisir les valeurs de tous les éléments de la matrice

* Pour calculer le produit :

 **NOMS** 1 :[A] Entrée  NOMS 2 :[B] Entrée Entrée

La matrice produit s’affiche

* Pour stocker le résultat dans la matrice  :

 3 :[C] Entrée Entrée

* Pour effacer une matrice :

 2 :Efface 5 :Matrice… Entrée

Mettre la flèche en face de la matrice à effacer et appuyer sur **Suppr**

***Propriété 1***

Soit une matrice de dimension .

Soit et des matrices colonnes de dimension .

Alors :

|  |
| --- |
|  |

***Démonstration :***

Posons et

* D’une part, on a

Et donc le produit

* D’autre part, on a

et donc la somme

On a bien pour chaque ligne , l’égalité

Conclusion :

***Propriété 2***

Soit une matrice de dimension .

Soit et des matrices colonnes de dimension .

Alors :

|  |
| --- |
| Pour tout réel  :  |

***Démonstration :***

Posons et

* D’une part, on a

Et donc le produit

* D’autre part, on a

et donc le produit par le réel

On a bien pour chaque ligne , l’égalité

Conclusion :

Pour tout réel  :

## Multiplication de deux matrices carrées d’ordre *n*

***Définition :***

Soit et deux matrices carrées d’ordre  **.**

La matrice , notée aussi **est une matrice carrée** d’ordre  **.**

Si sont les   lignes de la matrice
et si sont les colonnes de la matrice ,

Alors l’élément de la matrice est égal à l’unique élément de la matrice où

* désigne la matrice ligne formée par la ligne de
* désigne la matrice colonne formée par la colonne de

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

***Exemple :***

Soit les matrices et .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

***Remarque***

On peut généraliser la notion de produit matriciel à certains cas de matrices non carrées lorsque le nombre de colonnes de est égal au nombre de lignes de .

***Propriétés***

* Soit un réel est et des matrices carrées d’ordre . Alors :

Le produit matriciel a la propriété d’**associativité**.

* Pour tout réel  :

Le produit matriciel est **compatible** avec la multiplication par un réel.

Le produit matriciel a la propriété de **distributivité à gauche** par rapport à l’addition matricielle.

Le produit matriciel a la propriété de **distributivité à droite** par rapport à l’addition matricielle.

* ![C:\Documents and Settings\HP_Propriétaire\Local Settings\Temporary Internet Files\Content.IE5\2BFCZEU4\MC900411320[1].wmf]()

Le produit matriciel n’a pas la propriété de **commutativité.**

# Puissances d’une matrice

## Matrice diagonale

***Définition 1 :***

On appelle diagonale (ou diagonale principale) d’une matrice les éléments de la matrice ayant un indice de ligne égal à l’indice de colonne.

***Exemples :***

Soit les matrices :

Leurs éléments diagonaux sont les , , .

***Définition 2 :***

On appelle **matrice diagonale** une **matrice carrée** dont les éléments non diagonaux sont tous nuls.

***Exemple :***

 est une matrice diagonale.

Ses éléments diagonaux sont , , .

## Matrice unité

***Définition :***

On appelle **matrice unité** une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à .

On note la matrice unité d’ordre  **.**

***Exemples :***

 etc.

Soit avec et . Considérons la matrice .

On a:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Et on a aussi :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

***Propriété :***

Pour toute matrice carrée d’ordre , on a **.**

## La puissance *p* d’une matrice carrée d’ordre *n*

***Définition :***

Soit une matrice carrée d’ordre et soit un entier naturel non nul.

On définit la matrice telle que . Par convention .

***Exemple :***

Soit , alors

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

On peut aussi calculer ainsi :

***Propriété :***

Soit une matrice diagonale d’ordre et ses éléments diagonaux.

Pour tout entier , la matrice est une matrice diagonale et ses éléments diagonaux sont respectivement

***Démonstration pour les matrices diagonales d’ordre 2 de la forme  :***

Montrons par récurrence que la propriété est vraie pour tout :

* Initialisation :

Pour , on a :

 et

Donc :

La propriété est donc vraie pour

* Hérédité :

Supposons que pour un entier naturel non nul , on ait

Calculons :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

La propriété est donc vraie pour si on suppose qu’elle est vraie pour .

* Conclusion :

La propriété est vraie pour tout :

***Exemples :***

Si : , alors , etc.

# Matrice inverse

***Définition :***

Soit une matrice **carrée** d’ordre .

S’il existe une matrice telle que , alors on dit que la matrice est **inversible**.

***Exemple :***

Soit . Considérons la matrice . Effectuons le produit matriciel :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Et effectuons le produit :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Conclusion : La matrice carrée est inversible.

***Propriété :***

Il existe des matrices carrées non nulles**, non inversibles**.

***Exemple :***

Soit . Montrons par l’absurde que n’est pas inversible.

Calculons d’abord le produit de la matrice par deux matrices colonnes différentes :

* Premier produit :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

* Deuxième produit :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Supposons que soit inversible et donc qu’il existe une matrice telle que .

Les deux égalités calculées plus haut peuvent être multipliées membre à membre par la matrice On obtient :

 et

 et

Par propriété de la matrice unité , on a :

 et

D’où on déduit que . C’est absurde. Donc lamatrice  **n’a pas de matrice inverse** .

***Propriété (admise) :***

Soit une matrice carrée d’ordre .

Si est une matrice carrée d’ordre telle que ( étant la matrice unité d’ordre ) alors .

Réciproquement :

Si est une matrice carrée d’ordre telle que ( étant la matrice unité d’ordre ) alors .

Ce résultat n’est pas évident car on a vu que dans le cas général, **le produit matriciel n’est pas commutatif**.

***Propriété :***

Soit une matrice carrée d’ordre .

* Si est une matrice telle que
* Si est une matrice telle que

Alors

***Conséquence de cette propriété :***

L’égalité montre que, si elle existe, alors la matrice inverse de est unique. Car si ce n’était pas le cas, on pourrait trouver deux matrices inverses distinctes et vérifiant à la fois et . Cette propriété peut s’énoncer : « une matrice inversible a une **unique matrice inverse** ».

Notation : Si est inversible, on note l’unique matrice inverse de . Elle vérifie les relations .

***Démonstration de la propriété :***

Soit une matrice carrée d’ordre . Supposons que soit inversible. Donc il existe au moins une matrice telle que :

En multipliant les deux membres de cette égalité par une matrice telle que on obtient :

L’égalité des matrices et est ainsi démontrée.

***Exemple :***

Soit la matrice définie par et deux matrices colonnes et .

Si alors pour toute matrice carrée d’ordre 2, on a l’égalité :

Si est inversible, alors elle possède une unique matrice inverse avec laquelle on peut écrire :

Ecrivons le produit matriciel :

Si s’écrit ou encore ,ce qui peut s’écrire, d’après la définition de l’égalité des matrices, comme un système d’équations :

On peut isoler et  :

On élimine dans la deuxième équation :

On élimine dans la première équation :

Ce système peut s’écrire de façon matricielle :

Or, on avait écrit que, si est inversible, elle possède une unique matrice inverse avec laquelle on peut écrire :

Conclusion :

Puisque ,

 est inversible et son unique matrice inverse est .

***Propriété :***

Soit une matrice carrée d’ordre 2, non nulle.

 est inversible si et seulement si

***Démonstration :***

Soit la matrice .

Effectuons le produit

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

Ce qui s’écrit ou encore en posant .

* Si alors on peut multiplier les deux membres par ce qui donne : .

Donc est inversible et son inverse est .

* Si alors s’écrit c'est-à-dire .

Démontrons par l’absurde que n’est pas inversible dans ce cas.

Si est inversible alors elle a une matrice inverse et on peut écrire :

Par ailleurs, , donc

Ce résultat est contradictoire avec l’hypothèse et une matrice carrée d’ordre 2, non nulle.

Conclusion :

La matrice carrée non nulle,d’ordre 2 est inversible si et seulement si .

Lorsque est inversible, sa matrice inverse est .

# Application à la résolution de systèmes d’équations linéaires

***Définition :***

Un système d’équations linéaires est un système d’équations dans lesquelles les inconnues n’apparaissent jamais multipliées par une autre inconnue ni par elles-mêmes. C'est-à-dire qu’il n’y a jamais de terme du type ni du type , etc.

En conséquence, un système de équations linéaires à inconnues

peut s’écrire sous la forme matricielle
en posant les matrices :

* et pour les constantes
* pour les inconnues.

***Exemple :***

Le système de deux équations linéaires à deux inconnues :

S’écrit avec , et .

***Propriété :***

Soit un système linéaire de équations à inconnues ayant pour écriture matricielle .

**Si**  est une matrice carrée inversible d’ordre et une matrice colonne à lignes,

**alors** ce système possède unesolution unique

***Démonstration :***

|  |  |
| --- | --- |
| Soit le système d’équation matricielle : Si est inversible, alors il existe une unique matrice telle que En multipliant à gauche les membres par : | Rappel : le système :s’écrit avec les matrices :  |

***Exemple 1 :***

Résoudre dans le système :

*Réponse :*

* *Le système a-t-il une unique solution ?*

 équivaut à :

 avec : , et .

 est une matrice carrée d’ordre 2. Pour savoir si elle est inversible, calculons

 (le réel est appelé **déterminant[[1]](#footnote-1)** de la matrice )

Donc est inversible et donc le système a un unique couple solution.

* *Quelle est cette solution ?*

Pour trouver la matrice, on fait le produit .

Pour calculer à la calculatrice :

* Appuyer sur 
* Choisir 1 :[A]

Puis appuyer sur 

On trouve :

* équivaut successivement à

La calculatrice donne

Conclusion :

Le système d’inconnues et a un unique couple solution :

Interprétation graphique :

Les droites d’équation et d’équation se coupent en un point de coordonnées

***Exemple 2 :***

Résoudre dans le système :

*Réponse :*

* *Le système a-t-il une unique solution ?*

équivaut à :

 avec : , et .

 est une matrice carrée d’ordre 3. Pour savoir si elle est inversible, on calcule le déterminant de A

Donc est inversible et donc le système a un unique triplet solution.

* *Quelle est cette solution ?*

Pour trouver la matrice, on fait le produit . La calculatrice donne

Conclusion :

Le système d’inconnues , et a un unique triplet solution :

Interprétation graphique :

Les plans d’équation , d’équation et d’équation ont comme intersection l’ensemble avec de coordonnées



***Propriété : (admise)***

Soit un système linéaire de équations à inconnues ayant pour écriture matricielle .

**Si**  est une matrice carrée non inversible d’ordre et une matrice colonne à lignes,

**alors** ce système possède soit zéro solution soit une infinité.

***Exemple 1 :***

Le système :

a-t-il une unique solution ?

*Réponse :*

équivaut successivement à :

 avec : , et .

 est une matrice carrée d’ordre 2. Pour savoir si elle est inversible, on calcule .

Donc n’est pas inversible.

On ne peut donc pas calculer la matrice

Conclusion : le système d’inconnues et n’a donc pas un unique couple solution :

Interprétation graphique :

Les droites d’équation et d’équation ne se coupent en un point.



***Exemple 2 :***

Le système : a-t-il une unique solution ?

*Réponse :*

 équivaut successivement à :

 avec : , et .

 est une matrice carrée d’ordre 3. Pour savoir si elle est inversible, on calcule son déterminant.

.

Donc n’est pas inversible.

On ne peut donc pas calculer la matrice

Conclusion :

Le système d’inconnues et n’a donc pas un unique triplet solution.

Interprétation graphique :

Les plans d’équation d’équation et d’équation ne se coupent pas en un point.



1. Dans le menu MATH du module « matrice » de la calculatrice, figure la commande **det(** pour calculer le déterminant d’une matrice carrée. [↑](#footnote-ref-1)