

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3 .

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} = AU_n$.

3. On considère de plus les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $A^n = 2^n B + 4^n C$.

b. On admet que, pour tout entier naturel n , on a : $U_n = A^n U_0$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 2 \times 4^n - 2^n$.

Partie B

On dit qu'un entier naturel N est parfait lorsque la somme de ses diviseurs (positifs) est égale à $2N$.

Par exemple, 6 est un nombre parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6 et on a : $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$.

Dans cette partie, on cherche des nombres parfaits parmi les termes de la suite (u_n) étudiée dans la partie A.

1. Vérifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 2^n p_n$ avec $p_n = 2^{n+1} - 1$.

2. On considère l'algorithme suivant où N , S , U , P et K sont des entiers naturels.

```

S ← 0

Demander à l'utilisateur la valeur de N
P ← 2N+1 - 1
U ← 2N P

Pour K variant de 1 à U
    Si  $\frac{U}{K}$  est un nombre entier
        S ← S + K
    Fin Si
Fin Pour

Si S = 2U
    Afficher « oui »
Sinon
    Afficher « non »
Fin Si
    
```

a. À quelle question permet de répondre cet algorithme?

Compléter, sans justification, les cases vides du tableau donné en annexe. Il n'est pas demandé au candidat de programmer l'algorithme.

b. Faire une conjecture donnant une condition suffisante sur P pour que l'algorithme affiche « oui ».

3. Dans cette question, on suppose que p_n est un nombre premier. On note S_n la somme des diviseurs de u_n .

a. Montrer que $S_n = (1 + p_n) p_n$.

b. En déduire que u_n est un nombre parfait.

Affichage de l'algorithme pour les premières valeurs de N

N	P	U	S	Affichage final
0	1	1	1	non
1	3	6	12	oui
2	7			
3	15		360	
4	31		992	oui
5	63		6 552	non
6	127	8 128	16 256	