

Exercice 1 Chapitre 1

- 1) Écrivons la relation (F) pour les quatre cas correspondant à m est un entier naturel non nul et $m \leq 4$

m	Relation (F)
1	$7^m - 6 = 1 \Leftrightarrow 7^m = 7$ une valeur possible : $m = 1$
2	$7^m - 12 = 1 \Leftrightarrow 7^m = 13$ aucune valeur possible pour m
3	$7^m - 24 = 1 \Leftrightarrow 7^m = 25$ aucune valeur possible pour m
4	$7^m - 48 = 1 \Leftrightarrow 7^m = 49$ une valeur possible : $m = 2$

Conclusion: les deux couples sélectionnés $(m; n)$ tels que $m \leq 4$ sont $(1; 1)$ et $(4; 2)$.

- 2) a) Si $(m; n)$ vérifie (F) alors $7^m - 3 \times 2^m = 1$
donc $7^m - 3 \times 2^m \equiv 1 \pmod{32}$ (32)

Dans cet énoncé, on voit que le module 32 est une puissance de 2.
De plus, on sait que $m > 5$ donc on peut s'écrire
 $m = 5 + k$ où k est un entier naturel

$$\begin{aligned} 2^m &= 2^{5+k} \\ 2^m &= 2^5 \times 2^k \\ 2^m &= 32 \times 2^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } 32 &\equiv 0 \pmod{32} \\ 2^k \times 32 &\equiv 0 \pmod{32} \\ 2^m &\equiv 0 \pmod{32} \\ -3 \times 2^m &\equiv 0 \pmod{32} \end{aligned}$$

On peut remplacer -3×2^m par 0 dans la congruence $7^m - 3 \times 2^m \equiv 1 \pmod{32}$
ce qui donne :

$$7^m \equiv 1 \pmod{32}$$

b)

m	$7^m \equiv \dots \pmod{32}$
0	1
1	7
2	17
3	23
4	1
5	7
6	17
7	23

- Montrons que si n est un multiple de 4, alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$
Si $n = 4k$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors $7^{4k} = (7^4)^k$
Or $7^4 \equiv 1 \pmod{32}$ donc $7^{4k} \equiv 1^k \pmod{32}$
 $7^{4k} \equiv 1 \pmod{32}$
donc $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ en effet.

- Montrons que si n est un multiple de 4, + 1 alors $7^n \equiv 7 \pmod{32}$
Si $n = 4k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors $7^{4k+1} = 7^{4k} \times 7 = (7^4)^k \times 7$
Or $7^{4k} \equiv 1 \pmod{32}$ donc $7^{4k+1} \equiv 1 \times 7 \pmod{32}$
 $7^{4k+1} \equiv 7 \pmod{32}$
 $7^n \equiv 7 \pmod{32}$ en effet.

- Montrons que si n est un multiple de $4 + 2$ alors $7^n \equiv 17 \pmod{32}$
 Si $n = 4k+2$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors $7^{4k+2} = 7^{4k} \times 7^2 = (7^4)^k \times 7^2$
 Or $7^4 \equiv 1 \pmod{32}$ donc $7^{4k+2} \equiv 1 \times 7^2 \pmod{32}$
 $7^{4k+2} \equiv 7^2 \pmod{32}$
 $7^{4k+2} \equiv 17 \pmod{32}$ en effet.

- Montrons que si n est un multiple de $4 + 3$ alors $7^n \equiv 23 \pmod{32}$
 Si $n = 4k+3$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors $7^{4k+3} = 7^{4k} \times 7^3 = (7^4)^k \times 7^3$
 $7^{4k+3} \equiv 1 \times 7^3 \pmod{32}$
 $7^{4k+3} \equiv 7^3 \pmod{32}$
 $7^{4k+3} \equiv 23 \pmod{32}$ en effet.

Ayant ainsi passé en revue toutes les valeurs possibles pour l'entier naturel non nul n , on voit donc que
 si (m, n) vérifie (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ (d'après 2a))
 et si $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ alors $n = 4k$, c'est-à-dire n est divisible par 4.

- c) Puisque le module est 5 dans cette question, étudions les restes de la division par 5 des puissances de 7.

n	$7^n \equiv \dots \pmod{5}$
0	1
1	2
2	4
3	3
4	1
5	2

Par un raisonnement similaire à celui de la question précédente, on montre que

- si n est un multiple de 4 alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$
- si n est un multiple de $4+1$ alors $7^n \equiv 2 \pmod{5}$
- si n est un multiple de $4+2$ alors $7^n \equiv 4 \pmod{5}$
- si n est un multiple de $4+3$ alors $7^n \equiv 3 \pmod{5}$

Conclusion Les valeurs de l'entier naturel n non nul qui vérifient $7^n \equiv 1 \pmod{5}$ sont les mêmes que celles qui vérifient $7^n \equiv 1 \pmod{32}$ c'est-à-dire les multiples de 4.
 Donc si (m, n) vérifie (F) avec $m \geq 5$ alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$

- d) Si (m, n) vérifie (F) avec $m \geq 5$ alors $7^n - 3 \times 2^m = 1$
 Or $1 \equiv 1 \pmod{5}$ donc $7^n - 3 \times 2^m \equiv 1 \pmod{5}$

De plus, d'après la question c) on sait que dans ce cas $7^n \equiv 1 \pmod{5}$

En remplaçant dans la congruence, on a $1 - 3 \times 2^m \equiv 1 \pmod{5}$
 $-3 \times 2^m \equiv 0 \pmod{5}$

-3×2^m est divisible par 5.

Or -3×2^m dans sa décomposition en facteurs premiers n'a pas de 5 donc il ne peut pas être divisible par 5.

Donc il n'existe aucun entier m tel que $-3 \times 2^m \equiv 0 \pmod{5}$

Conclusion: Pour $m \geq 5$, il n'existe aucun couple (m, n) solution de (F).

- 3) L'ensemble des couples (m, n) vérifiant (F) est $S = \{(1, 1), (4, 2)\}$.

Exercice 2

- 1) Plutôt que d'essayer au hasard de trouver un couple (x, y) qui satisfasse à la proposition, dressons un tableau avec des congruences pour répertorier tous les cas possibles modulo 3.

$x \equiv \dots (3)$	$y \equiv \dots (3)$	$x^2 \equiv \dots (3)$	$y^2 \equiv \dots (3)$	$x^2 + y^2 \equiv \dots (3)$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	2	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	2
1	2	1	1	2
2	0	1	0	1
2	1	1	1	2
2	2	1	1	2

En lisant la dernière colonne, on s'aperçoit que $x^2 + y^2 \equiv 0 (3)$ dans un seul cas : $x \equiv 0 (3)$ et $y \equiv 0 (3)$.
On peut donc conclure que la proposition est Fausse.

- 2) le nombre $(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) + k = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n + 3$ si $n \equiv 3$.
Dans ce cas il est divisible par 3. Il n'est donc pas premier.

On peut faire le même raisonnement pour toutes les valeurs de k entre 2 et n .
la proposition est Vraie.

- 3) Il faut faire l'étude des congruences des puissances de 11 modulo 7.

On étudie quelques valeurs k pour les exposants de 11.

On verra ensuite dans quelle catégorie se situe 2011.

$k \equiv \dots (7)$	$11^k \equiv \dots (7)$
0	1
1	4
2	2
3	1
4	4
5	2
6	1

Il ressort de cela qu'il n'y a que 3 catégories :

Soit $k \equiv 0 (7)$

Soit $k \equiv 1 (7)$

Soit $k \equiv 2 (7)$

Or $2011 = 3 \times 670 + 1$

donc l'exposant 2011 correspond à $k \equiv 1 (7)$

donc $11^{2011} \equiv 4 (7)$

Réponse Vraie

4) la question revient à dire si l'implication
 "Si $n+3$ divise n^2+3 alors $n+3$ divise 6" est vraie ou fausse.

Puisque dans la division euclidienne $a = bq + r$, $a \in \mathbb{N}$
 et $b \in \mathbb{N}^*$, on a comme conditions : $n^2+3 \geq 0$ (toujours vrai)
 et $n+3 \geq 1$
 $n \geq -2$

• On ne peut pas utiliser la méthode vue au Sauve-Fontaine 1 p.11
 question 3, car aucune combinaison linéaire de $(n+3)$ et
 (n^2+3) ne peut donner une constante.

• On va donc explorer les différentes valeurs de l'entier
 relatif n à partir de $n=-2$ et voir la concordance
 des cas où :
 * $n+3$ divise n^2+3
 * $n+3$ divise 6

• On utilise les listes de la calculatrice

n	$n+3$	n^2+3	reste de $\frac{n^2+3}{n+3}$
L1	L2	L3	L4
-2	1	7	0
-1	2	4	0
0	3	3	0
1	4	4	2
2	5	7	1
3	6	12	0
4	7	19	6
5	8	28	6
6	9	39	6
7	10	52	6
8	11	67	6

Les formules à entrer dans les titres L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 sont:
 $L_1 = \text{suite}(X, X, -2, 20, 1)$ (pour "suite" aller dans 2nd [LIST] OP 5: suite)

$L_2 = L_1 + 3$ (pour " L_1 " c'est 2nd [1] + 3)

$L_3 = L_1^2 + 3$

$L_4 = \text{reste}(6, L_2)$ (pour "reste" aller dans [MATH] NBRE 0: reste)

$L_5 = \text{reste}(L_3, L_2)$

Un contre-exemple apparaît pour $n=1$.

En effet $n=1$ est un entier tel que $n+3$ divise n^2+3
 mais $n+3$ ne divise pas 6.

Conclusion: la proposition est Fausse.

5) $81x^2 = y^2 + 17$

$81x^2 - y^2 = 17$

$(9x)^2 - y^2 = 17$

$(9x-y)(9x+y) = 17$

17 est un nombre premier. Les deux seules possibilités
 sont $-17 \times -1 = 17$ et $1 \times 17 = 17$

Comme la question ne concerne que les entiers naturels x et y ,
 et que l'un des facteurs $(9x+y)$ est donc positif, on élimine
 la possibilité $-17 \times -1 = 17$. Il reste donc deux possibilités:

$\begin{cases} 9x-y=1 \\ 9x+y=17 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 9x-y=17 \\ 9x+y=1 \end{cases}$ où $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$

$9x+y > 0$ donc le 2^e système est éliminé.

Il reste le premier système dont la solution est $(1; 8)$. Proposition Vraie (4)

Exercice 3

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n + 21 \end{cases}$$

1) $u_1 = 10(1) + 21$
 $u_1 = 31$

$u_2 = 10(31) + 21$
 $u_2 = 331$

$u_3 = 10(331) + 21$
 $u_3 = 3331$

2) a) Soit la propriété $P(n): 3u_n = 10^{n+1} - 7$
 Montrons que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation: $3u_0 = 3(1) = 3$ $10^{0+1} - 7 = 3$
 $3u_0 = 3$
 donc $3u_0 = 10^{0+1} - 7$
 $P(0)$ est vraie.

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel k
 on ait $3u_k = 10^{k+1} - 7$

Montrons qu'alors $3u_{k+1} = 10^{k+2} - 7$

$3u_{k+1} = 3(10u_k + 21)$ en utilisant la définition de (u_n)

$3u_{k+1} = 30u_k + 63$

$3u_{k+1} = 10(3u_k) + 63$ ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

$3u_{k+1} = 10(10^{k+1} - 7) + 63$

$3u_{k+1} = 10^{k+2} - 70 + 63$

$3u_{k+1} = 10^{k+2} - 7$. Donc $P(n)$ est héréditaire.

Conclusion: $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $3u_n = 10^{n+1} - 7$
 donc

$3u_n = \underbrace{999 \dots 93}_{n \text{ fois}}$ d'où $u_n = \underbrace{333 \dots 31}_{n \text{ fois}}$

4) L'écriture décimale de u_n se termine toujours par 1, donc u_n n'est jamais divisible par 2 (il faudrait que le chiffre des unités soit pair) ni par 5 (il faudrait que le chiffre des unités soit 0 ou 5).
 De plus la somme des chiffres de u_n est $n \times 3 + 1$
 donc n n'est jamais un multiple de 3.
 Donc u_n n'est jamais divisible par 3.

5) a) D'après la question 2) a) $3\mu_n = 10^{n+1} - 7$

$$\begin{aligned} 10 &\equiv -1 \pmod{11} \\ 10^n &\equiv (-1)^n \pmod{11} \\ 10^{n+1} &\equiv (-1)^{n+1} \pmod{11} \end{aligned}$$

$$10^{n+1} \equiv (-1)^n \pmod{11}$$

De plus, $-7 \equiv 4 \pmod{11}$

De plus, $-7 \equiv 4 \pmod{11}$ donc $10^{n+1} - 7 \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$
Ainsi $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}, \forall n \in \mathbb{N}$

b) $4 - (-1)^n \neq 0 \quad (11) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4 - (-1)^n \text{ vaut } 3 \text{ ou } 5)$
 donc $3 \nmid u_n \neq 0 \quad (11)$

denn $3u_n \neq 0$ (11)

donc $3M_n$ n'est jamais divisible par 10

donc u n'est jamais divisible par n .

6) a) $10^4 = 17 \times 588 + 4$ donc le reste de la division de 10^4 par 17 est 4

b) $10^4 \equiv 4 \pmod{17}$

done

$$(10^4)^4 \equiv 4^4 \pmod{17}$$

$$10^{16} \equiv 16 \pmod{17}$$

c) $3 \mu_{16k+8} = 10 \times 10^{16k+8} - 7$

$$3u_{16k+8} = 10^9 \times (10^{16})^k - 7$$

$$\text{Or } 10^{16} \equiv 1 \quad (17)$$

donc $(10^{16})^k \equiv 1 \pmod{17}$

de plus $10^9 \equiv 7 \pmod{17}$

donc $10^9 \times (10^{16})^{\frac{1}{2}} \equiv 7 (17)$

$$\text{dieu } 10^9 \times (10^{16})^k - 7 \equiv 0 \quad (17)$$

Česta dvě $B_{16k+8} \equiv 0 \pmod{17}$

Ainsi 17 divise 3×11
 $16k + 8$

17 est un facteur premier qui n'est pas dans la décomposition de 3. Donc 17 est un facteur premier qui est dans la décomposition en facteurs premiers de $16k+8$.

Conclusion: Tous les nombres u_{16k+8} , $\forall k \in \mathbb{N}$ sont divisibles par 17

Example: Pour $k=1$:

$$u_{24} = \underbrace{3333}_{24 \text{ fois}}, 31 \text{ est divisible par } 17.$$

Vérification sur le site wims.unice.fr

Outils de calcul et de graphisme en ligne
Factoris

Factorisation de $n = 3333333333333333333333331$:

$$333333333333333333333333 = 17 \times 821593951 \times 238656128290493$$

Exercice 4

- 1) Si le couple $(x; y)$ d'entiers relatifs vérifie l'égalité
 $11x^2 - 7y^2 = 5$
 alors $11x^2 - 7y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ (5) puisque 5 est divisible par 5
 $11x^2 \equiv 7y^2 \pmod{5}$ (5)
 Or $11 \equiv 1 \pmod{5}$ (5)
 et $7 \equiv 2 \pmod{5}$ (5)
 donc $1x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$ (5)
 $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$ (5)

2)

Modulo 5, x est congrue à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congrue à	0	1	4	4	1

Modulo 5, y est congrue à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congrue à	0	2	3	3	2

- 3) Ces valeurs possibles du reste sont:
 • Pour x^2 : 0, 1, 4
 • Pour $2y^2$: 0, 2, 3
- 4) Si $(x; y)$ est solution de (F) alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$ d'après 1)
 Or, d'après les tableaux, seulement 0 est une congruence commune de x^2 et $2y^2$ modulo 5
 On en déduit alors que $x^2 \equiv 0 \pmod{5}$ (ce qui correspond à $x \equiv 0 \pmod{5}$) et que $2y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ (ce qui correspond à $y \equiv 0 \pmod{5}$)
Conclusion: x et y sont tous les deux des multiples de 5

- 5) Si x est un multiple de 5 alors $x = k \cdot 5$ où $k \in \mathbb{Z}$
 Si y est un multiple de 5 alors $y = k' \cdot 5$ où $k' \in \mathbb{Z}$
 Dans ce cas $11(k \cdot 5)^2 - 7(k' \cdot 5)^2 = 5$
 $11k^2(5)^2 - 7k'^2(5)^2 = 5$
 $(5)^2(11k^2 - 7k'^2) = 5$
 $5 \times (11k^2 - 7k'^2) = 1$

impossible : aucun entier $11k^2 - 7k'^2$ n'existe puisque 1 n'est pas divisible par 5.

- 6) On a montré dans la question 4) que si des solutions $(x; y)$ de l'équation (F) existent alors x et y sont des multiples de 5 tous les deux.
 On a montré dans la question 5) qu'aucun couple $(x; y)$ d'entiers tous les deux multiples de 5 ne pourrait être des solutions de (F)

Conclusion: L'équation (F) n'a aucune solution.