Exercices d'entrainement

Chapitre 1 DIVISIBILITE – NOMBRES PREMIERS – CONGRUENCES

Exercice 1 :

Prérequis :

- *Savoir raisonner par disjonction des cas avec les restes d'une division euclidienne*
- *Savoir calculer avec des congruences*

On se propose de déterminer les couples $(m\,;n)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$(F):\quad 7^n - 3 \times 2^m = 1.$$

1) Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions pour $m \leq 4$.

2) On suppose que $m \geq 5$.

   a. Montrer que si le couple $(m\,;n)$ vérifie (F), alors :

   $$7^n \equiv 1 \quad (32).$$

   b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(m\,;n)$ vérifie (F), alors n est divisible par 4.

   c. En déduire que si le couple $(m\,;n)$ vérifie (F), alors :

   $$7^n \equiv 1 \quad (5).$$

   d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples $(m\,;n)$ vérifiant (F) ?

3) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls $(m\,;n)$ vérifiant (F).

Exercice 2 :

Prérequis :

- *Savoir raisonner avec des congruences*
- *Savoir reconnaitre un nombre premier*

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification.

1) On considère l'équation (E) :

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \quad (3).$$

Proposition :

" Il existe de couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3 ".

2) Soit n un entier, $n \geq 3$.

Proposition :

" Pour tout naturel k $(2 \leq k \leq n)$, le nombre $(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n) + k$ n'est pas premier ".

3) Soit $N = 11^{2011}$.

Proposition :

" L'entier N est congru à 4 modulo 7 ".

4) Soit n un entier tel que $n + 3$ divise $n^2 + 3$.

Proposition :

" Un tel entier n est tel que $n + 3$ divise 6 ".

5) On considère l'équation : $81x^2 = y^2 + 17$.

Proposition :

" Il existe un unique couple $(x\,;y)$ d'entiers naturels solution de l'équation ".

Exercice 3 :

Prérequis :

- *Connaitre les critères de divisibilité*
- *Savoir reconnaitre un nombre premier*
- *Savoir calculer avec des congruences*

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 10 \times u_n + 21.$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$3u_n = 10^{n+1} - 7.$$

   b. En déduire l'écriture décimale de u_n.

3) Montrer que u_2 est un nombre premier.

4) Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2,ni par 3, ni par 5.

5) a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$3u_n \equiv 4 - (-1)^n \quad (11)$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6) a. Donner le reste de la division euclidienne de 10^4 par 17.

   b. En déduire que $10^{16} \equiv 1 \quad (17)$.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

Exercice 4 :

Prérequis :

- *Savoir calculer avec des congruences*
- *Connaitre la notion de reste dans la division euclidienne*

On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$ où x et y sont des entiers relatifs.

1) Démontrer que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (F) alors :

$$x^2 \equiv 2y^2 \quad (5).$$

2) Soit x et y des entiers relatifs.

Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à ...	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à ...					

Modulo 5, y est congru à ...	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à ...					

3) Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 et de $2y^2$ par 5 ?

4) En déduire que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

5) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5 alors le couple $(x\,;y)$ n'est pas solution de (F).

6) Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?