# Exercices d'entrainement

# Chapitre 1 DIVISIBILITE – NOMBRES PREMIERS – CONGRUENCES

**Exercice 1 :**

*Prérequis :*

* *Savoir raisonner par disjonction des cas avec les restes d'une division euclidienne*
* *Savoir calculer avec des congruences*

On se propose de déterminer les couples $(m ;n)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

$$\left(F\right) : 7^{n}-3×2^{m}=1.$$

1. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions pour $m\leq 4.$
2. On suppose que $m\geq 5.$
	1. Montrer que si le couple $(m ;n)$ vérifie $(F)$, alors :

$$7^{n}≡1 \left(32\right).$$

* 1. En étudiant les restes de la division par $32$ des puissances de $7$, montrer que si le couple $(m ;n)$ vérifie $(F)$, alors $n$ est divisible par $4$.
	2. En déduire que si le couple $(m ;n)$ vérifie $(F)$, alors :

$$7^{n}≡1 \left(5\right).$$

* 1. Pour $m\geq 5$, existe-t-il des couples $(m ;n)$ vérifiant $(F)$ ?
1. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls $(m ;n)$ vérifiant $(F)$.

**Exercice 2 :**

*Prérequis :*

* *Savoir raisonner avec des congruences*
* *Savoir reconnaitre un nombre premier*

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification.

1. On considère l'équation $(E)$ :

$$x^{2}+y^{2}≡0 \left(3\right).$$

**Proposition :**

" Il existe de couples $(x ;y)$ d'entiers relatifs solutions de $(E)$ qui ne sont pas des couples de multiples de $3$ ".

1. Soit $n$ un entier, $n\geq 3.$

**Proposition :**

" Pour tout naturel $k$ ($2\leq k\leq n$), le nombre $\left(1×2×3×…×n\right)+k$ n'est pas premier ".

1. Soit $N=11^{2011}$.

**Proposition :**

" L'entier $N$ est congru à $4$ modulo $7$ ".

1. Soit $n$ un entier tel que $n+3$ divise $n^{2}+3.$

**Proposition :**

" Un tel entier $n$ est tel que $n+3$ divise $6$ ".

1. On considère l'équation : $81x^{2}=y^{2}+17.$

**Proposition :**

" Il existe un unique couple $(x ;y)$ d'entiers naturels solution de l'équation ".

**Exercice 3 :**

*Prérequis :*

* *Connaitre les critères de divisibilité*
* *Savoir reconnaitre un nombre premier*
* *Savoir calculer avec des congruences*

On considère la suite $(u\_{n})$ d'entiers naturels définie par $u\_{0}=1$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u\_{n+1}=10×u\_{n}+21.$$

1. Calculer $u\_{1}, u\_{2}$ et $u\_{3}$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ :

$$3u\_{n}=10^{n+1}-7.$$

b. En déduire l'écriture décimale de $u\_{n}$.

1. Montrer que $u\_{2}$ est un nombre premier.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u\_{n}$ n'est divisible ni par $2$,ni par $3$, ni par $5.$
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$3u\_{n}≡4-\left(-1\right)^{n} (11)$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u\_{n}$ n'est pas divisible par $11.$

1. a. Donner le reste de la division euclidienne de $10^{4}$ par $17.$

b. En déduire que $10^{16}≡1 \left(17\right).$

c. En déduire que, pour tout entier naturel $k$, $u\_{16k+8}$ est divisible par $17.$

**Exercice 4 :**

*Prérequis :*

* *Savoir calculer avec des congruences*
* *Connaitre la notion de reste dans la division euclidienne*

On considère l'équation $\left(F\right)$ : $11x^{2}-7y^{2}=5$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

1. Démontrer que si le couple $(x ;y)$ est solution de $\left(F\right)$ alors :

$$x^{2}≡2y^{2} \left(5\right).$$

1. Soit $x$ et $y$ des entiers relatifs.

Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Modulo 5, $x$ est congru à … | $$0$$ | $$1$$ | $$2$$ | $$3$$ | $$4$$ |
| Modulo 5, $x^{2}$ est congru à … |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Modulo 5, $y$ est congru à … | $$0$$ | $$1$$ | $$2$$ | $$3$$ | $$4$$ |
| Modulo 5, $2y^{2}$ est congru à … |  |  |  |  |  |

1. Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $x^{2}$ par $5$ et de $2y^{2}$ par $5$ ?
2. En déduire que si le couple $(x ;y)$ est solution de $(F)$, alors $x$ et $y$ sont des multiples de $5$.
3. Démontrer que si $x$ et $y$ sont des multiples de $5$ alors le couple $(x ;y)$ n'est pas solution de $(F)$.
4. Que peut-on en déduire pour l'équation $(F)$ ?