# Exercices d'entrainement

# Chapitre 1 DIVISIBILITE – NOMBRES PREMIERS – CONGRUENCES

**Exercice 1 :**

*Prérequis :*

* *Savoir raisonner par disjonction des cas avec les restes d'une division euclidienne*
* *Savoir calculer avec des congruences*

On se propose de déterminer les couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :

1. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions pour
2. On suppose que
   1. Montrer que si le couple vérifie , alors :
   2. En étudiant les restes de la division par des puissances de , montrer que si le couple vérifie , alors est divisible par .
   3. En déduire que si le couple vérifie , alors :
   4. Pour , existe-t-il des couples vérifiant ?
3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant .

**Exercice 2 :**

*Prérequis :*

* *Savoir raisonner avec des congruences*
* *Savoir reconnaitre un nombre premier*

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification.

1. On considère l'équation :

**Proposition :**

" Il existe de couples d'entiers relatifs solutions de qui ne sont pas des couples de multiples de ".

1. Soit un entier,

**Proposition :**

" Pour tout naturel (), le nombre n'est pas premier ".

1. Soit .

**Proposition :**

" L'entier est congru à modulo ".

1. Soit un entier tel que divise

**Proposition :**

" Un tel entier est tel que divise ".

1. On considère l'équation :

**Proposition :**

" Il existe un unique couple d'entiers naturels solution de l'équation ".

**Exercice 3 :**

*Prérequis :*

* *Connaitre les critères de divisibilité*
* *Savoir reconnaitre un nombre premier*
* *Savoir calculer avec des congruences*

On considère la suite d'entiers naturels définie par et pour tout entier naturel :

1. Calculer et .
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel :

b. En déduire l'écriture décimale de .

1. Montrer que est un nombre premier.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel , n'est divisible ni par ,ni par , ni par
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel :

b. En déduire que, pour tout entier naturel , n'est pas divisible par

1. a. Donner le reste de la division euclidienne de par

b. En déduire que

c. En déduire que, pour tout entier naturel , est divisible par

**Exercice 4 :**

*Prérequis :*

* *Savoir calculer avec des congruences*
* *Connaitre la notion de reste dans la division euclidienne*

On considère l'équation : où et sont des entiers relatifs.

1. Démontrer que si le couple est solution de alors :
2. Soit et des entiers relatifs.

Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Modulo 5, est congru à … |  |  |  |  |  |
| Modulo 5, est congru à … |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Modulo 5, est congru à … |  |  |  |  |  |
| Modulo 5, est congru à … |  |  |  |  |  |

1. Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de par et de par ?
2. En déduire que si le couple est solution de , alors et sont des multiples de .
3. Démontrer que si et sont des multiples de alors le couple n'est pas solution de .
4. Que peut-on en déduire pour l'équation ?