

Exercice 1

- Partie A -

1)

On pose $X = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} \quad \text{Or on sait que } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

$$\text{D'autre part } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0, \text{ donc par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$2) \ a) \ f(x) = x e^{1-x^2} \quad \text{Posons } u(x) = x \quad \text{donc } u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^{1-x^2} \quad v'(x) = -2x e^{1-x^2}$$

$$\text{d'où } f'(x) = (1) e^{1-x^2} + x (-2x) e^{1-x^2}$$

$$\underline{f'(x) = (1 - 2x^2) e^{1-x^2}}$$

$$b) \ f'(x) = (1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x) e^{1-x^2}$$

Pour tout réel x , $e^{1-x^2} > 0$ d'où le tableau de variations:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
signe de $1 - \sqrt{2}x$	+	+	+	0	-
signe de $1 + \sqrt{2}x$	-	0	+	+	+
signe de e^{1-x^2}	+	+	+	+	+
signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-
variations de f		↗	↘	↗	↘

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{1 - \frac{1}{2}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} \quad x = -1,172$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} \quad x = 1,172$$

- Partie B -

1) Conjecture : $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ pour tout réel et a un point de contact avec $\mathcal{C}_g$ de coordonnées $(1; 1)$.

2) $f(0) = 0$. D'après le tableau de variations de f ,
 $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0]$.

$g(x) = e^{1-x}$ donc $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et notamment pour tout $x \in]-\infty; 0]$.
 Donc, $\forall x \in]-\infty; 0]$, on a $f(x) \leq 0 < g(x)$
 donc $\underline{f(x) < g(x)}$.

3) a) les propositions suivantes sont équivalentes :

- * $f(x) \leq g(x)$
- * $x e^{1-x^2} \leq e^{1-x}$
- * $\ln(x e^{1-x^2}) \leq \ln(e^{1-x})$ car la fonction $\ln$ est croissante sur $]0; +\infty[$
- * $\ln(x) + (1-x^2) \leq 1-x$
- * $\ln(x) + (1-x^2 - 1 + x) \leq 0$
- * $\ln(x) - x^2 + x \leq 0$

b) $\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1$ $\Phi'(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}$

Etude du signe de $-2x^2 + x + 1$: $\Delta = (1)^2 - 4(-2)(1) = 9$
 Il y a deux racines réelles $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$

x	0	1	$+\infty$
signe de $-2x^2 + x + 1$		+	-
signe de x		+	+
signe de $\Phi'(x)$		+	-
variations de Φ		$\nearrow$	$\searrow$

c) le maximum de Φ sur $]0; +\infty[$ est 0 (atteint en $x=1$)
 Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\Phi(x) \leq 0$

4) a) $\Phi(x) \leq 0 \iff f(x) \leq g(x)$ d'après la question 3) a)

• Donc d'après la question 3) c) on conclut que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Ainsi la conjecture $\mathcal{E}_f$ est en-dessous de $\mathcal{E}_g$ est vraie pour tout $x \in]0; +\infty[$.

• D'autre part, $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0]$ (d'après le tableau de variation de f à la partie A, question 2) b)

et $g(x) = e^{1-x}$ donc $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0]$.

Conclusion: $\mathcal{E}_f$ est en-dessous de $\mathcal{E}_g$ pour tout réel.

b) les propositions suivantes sont équivalentes.

- * $\mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}_g$ ont un seul point commun
- * $f(x) = g(x)$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$
- * $\ln(x e^{1-x^2}) = \ln(e^{1-x})$ a une solution unique sur $]0; +\infty[$
- * $\ln(x) - x^2 + x = 0$ a une solution unique sur $]0; +\infty[$
- * $\Phi(x) = 0$ a une solution unique sur $]0; +\infty[$

cette dernière proposition est vraie, d'après le tableau de variation de Φ . Donc la première proposition est vraie.

On déduit que l'abscisse de A est $x = 1$.
 L'ordonnée de A est $f(1) = g(1) = 1 \times e^{1-1^2} = 1 \times e^0 = 1$

c) le coefficient directeur de la tangente T à $\mathcal{E}_f$ au point A est $f'(1) = (1 - 2(1)^2) e^{1-1^2} = -1 \times e^0 = -1$

le coefficient directeur de la tangente T_A à $\mathcal{E}_g$ au point A est $g'(1) = -e^{1-1} = -e^0 = -1$. Conclusion: $T_A = T_A$

Partie C a) Si $F(x) = e^{1-x^2}$ alors $F'(x) = -2x e^{1-x^2}$
 Si $F(x) = -\frac{1}{2} e^{1-x^2}$ alors $F'(x) = x e^{1-x^2} = f(x)$ $F(x) = -\frac{1}{2} e^{1-x^2}$

b) $I = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$ $G(x) = -e^{1-x}$ est une primitive de g .
 $I = (G(1) - F(1)) - (G(0) - F(0)) = (-e^0 - (-\frac{1}{2}e^0)) - (-e - (-\frac{1}{2}e)) = \frac{e-1}{2}$

c) L'aire de la partie située entre $\mathcal{E}_f$ et $\mathcal{E}_g$, pour $x \in [0; 1]$ vaut $\frac{e-1}{2}$ u.a. (2)

Exercice 2

1) a) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 2 - 2 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ 1 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On cherche un réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$

$$\begin{cases} 2 = k \times 0 \\ 0 = -k \\ 4 = k \end{cases}$$

impossible - k n'existe pas - Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires - les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (2 \times 0) + (0 \times -1) + (4 \times 1) = 4$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$ Or $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (4)^2}$
 $\|\vec{AB}\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 et $\|\vec{AC}\| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (1)^2}$
 $\|\vec{AC}\| = \sqrt{2}$

donc $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \cos(\widehat{BAC}) \quad \widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{2\sqrt{10}}\right) = 51^\circ$

2) a) $\vec{n} \cdot \vec{AB} = (2)(2) + (-1)(0) + (-1)(4) = 0$
 $\vec{n} \cdot \vec{AC} = (2)(0) + (-1)(-1) + (-1)(1) = 1 - 1 = 0$
 et $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires (question 1) a)) } donc $\vec{n}$ est normal à (ABC).

b) (ABC) a pour équation $2x - y - z + d = 0$
 les coordonnées de A $(-1; 2; 0)$ vérifient cette équation donc:
 $2(-1) - (2) - (0) + d = 0$
 $-2 - 2 + d = 0 \quad d = 4$ donc $2x - y - z + 4 = 0$

3) a) P_2 est parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$, donc a pour vecteur normal $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

P_2 a pour équation $x - 2z + d = 0$

$O(0; 0; 0) \in P_2$ donc $(0) - 2(0) + d = 0$ donc $d = 0$

Donc P_2 a pour équation $x - 2z = 0$ soit $x = 2z$

b) P_1 a pour vecteur normal $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On cherche un réel k tel que $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$
 $\begin{cases} 3 = k \\ 1 = 0 \\ -2 = -2k \end{cases}$ impossible - k n'existe pas - Donc les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires - les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles - Ils sont donc secants.

c) $M(x; y; z) \in P_1 \cap P_2$ équivaut successivement à:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + 3 = 0 \\ x = 2z \end{cases}$$

On a un degré de liberté (une équation de plus que d'inconnues). Posons $z = t$ où t est un paramètre réel.

$$\begin{cases} 3x + y - 2t + 3 = 0 \\ x = 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y - 2t + 3 = 0 \\ x = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = -3x + 2t - 3 \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4) les coordonnées de $I(x; y; z)$ vérifient simultanément

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \\ 2x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

On cherche la valeur du paramètre t associée au point I :

$$\begin{aligned} 2(2t) - (-4t - 3) - t + 4 &= 0 \\ 4t + 4t + 3 - t + 4 &= 0 \\ 7t &= -7 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

la valeur du paramètre t pour le point I est $t = -1$
donc les coordonnées de I sont:

$$\begin{cases} x = 2(-1) \\ y = -4(-1) - 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

donc $I(-2; 1; -1)$

Exercice 2 spécialité

1) a) L'équation (E) $9d - 26m = 1$ a pour solution particulière
 $(d; m) = (3; 1)$. (trouvée en faisant le table de $\frac{9d-1}{26} = \frac{26m}{26}$)
 $\gamma_1 = \frac{9 \times 1 - 1}{26}$

b) les propositions suivantes sont équivalentes:

$$* 9d - 26m = 1$$

$$* (9d - 26m) - (9(3) - 26(1)) = 1 - 1$$

$$* 9d - 9(3) - 26m + 26(1) = 0$$

$$* 9(d-3) - 26(m-1) = 0$$

$$* 9(d-3) = 26(m-1)$$

$$c) \quad \left. \begin{array}{l} 9(d-3) = 26(m-1) \\ \text{et } d-3 \text{ est un entier} \end{array} \right\} \Rightarrow 9 \text{ divise } 26(m-1)$$

9 est premier avec 26 donc d'après le théorème de Gauss, 9 divise $m-1$,
 donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $9k = m-1$

$$\text{Ainsi } m = 9k + 1$$

d'où, en remplaçant dans l'équation de départ pour trouver d

$$9d - 26(9k+1) = 1$$

$$9d - 26 \times 9k - 26 = 1$$

$$9d - 26k \times 9 = 27$$

$$d - 26k = 3$$

$$d = 26k + 3$$

Ainsi les couples de solutions $(d; m)$ sont de la
 forme $(26k+3; 9k+1)$

• Réciproquement: Si $\begin{cases} d = 26k+3 \\ m = 9k+1 \end{cases}$ alors, en remplaçant
 dans $9d - 26m$

$$9d - 26m = 9(26k+3) - 26(9k+1)$$

$$9d - 26m = 9 \times 26k + 27 - 26 \times 9k - 26$$

$$9d - 26m = 1$$

Conclusion: $9d - 26m = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 26k+3 \\ m = 9k+1 \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$

2) a) Si $n = 26k - 1$ alors $1 = -n + 26k$
 Il existe un couple $(U, V) = (-1; k)$ d'entiers
 relatifs tels que: $1 = Ua + V26$

D'après le théorème de Bézout, n et 26 sont premiers
 entre eux. $\forall k \in \mathbb{Z}$

b) D'après la conséquence de la propriété fondamentale des
 diviseurs communs, $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; a - \lambda b)$, $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ici, } \text{PGCD}(26k-1; 26) = \text{PGCD}(26; (26k-1) - \lambda 26)$$

En particulier pour $\lambda = -8k$ on a:

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(26k-1; 26) &= \text{PGCD}(26; (26k-1) + 8k \cdot 26) \\ &= \text{PGCD}(26; 9 \times 26k + 27 - 28) \\ &= \text{PGCD}(26; 9(26k+3) - 28) = 1. \end{aligned}$$

(1 bis)

$$\text{PGCD}(26; 9d-28) = 1 \quad \text{avec } d = 26k+3$$

Conclusion: Les nombres $9d-28$ et 26 sont premiers entre eux lorsque $d = 26k+3, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

1)

ES

2)

$$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

3)

$$AC = \begin{pmatrix} 108 \\ 82 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5)

EE

Ainsi crypté en
 $\begin{matrix} \text{E} & \text{S} & \text{P} & \text{I} & \text{O} & \text{N} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{E} & \text{E} & \text{L} & \text{Z} & \text{W} & \text{H} \end{matrix}$ est

2) Décryptage:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $\det(A) = (9)(3) - (7)(4) = -1$
 $\det(A) \neq 0$ donc A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 9 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

b) Posons $K_1 = \begin{pmatrix} 23 \\ 16 \end{pmatrix}$ la 1^{ère} matrice cryptée correspondant à XG et posons C_1 la 1^{ère} matrice en clair

$$\begin{aligned} AC_1 &= K_1 \\ A^{-1}AC_1 &= A^{-1}K_1 \\ C_1 &= A^{-1}K_1 \end{aligned}$$

A la calculatrice, $C_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \end{pmatrix}$ soit
 $C_1 = \begin{pmatrix} 21 \\ 17 \end{pmatrix}$ car $-5 \equiv 21 \pmod{26}$

Posons $K_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \end{pmatrix}$ la 2^{ème} matrice cryptée correspondant à GY et posons C_2 la 2^{ème} matrice en clair.

$$\begin{aligned} AC_2 &= K_2 \\ A^{-1}AC_2 &= A^{-1}K_2 \\ C_2 &= A^{-1}K_2 \end{aligned}$$

A la calculatrice, $C_2 = \begin{pmatrix} 78 \\ -174 \end{pmatrix}$ soit
 $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ car $78 \equiv 0 \pmod{26}$
 $-174 \equiv 8 \pmod{26}$

Ainsi les lettres en clair sont:

V	R	A	I
21	17	0	8