*Classes de Terminale **4-5-6-7S***	**DEVOIR DE MATHEMATIQUES N° 5**	*Vendredi 3 mai 2019*
		Durée : 2 heures.
		Calculatrice autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté d'expression et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des résultats.

Tout résultat ou conclusion doit être justifié(e) (sauf indication contraire).

EXERCICE 1 : ***A faire par tous les élèves.*** *(12 points)*

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = xe^{1-x^2}.$$

1) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.

a) Démontrer que pour tout réel x,

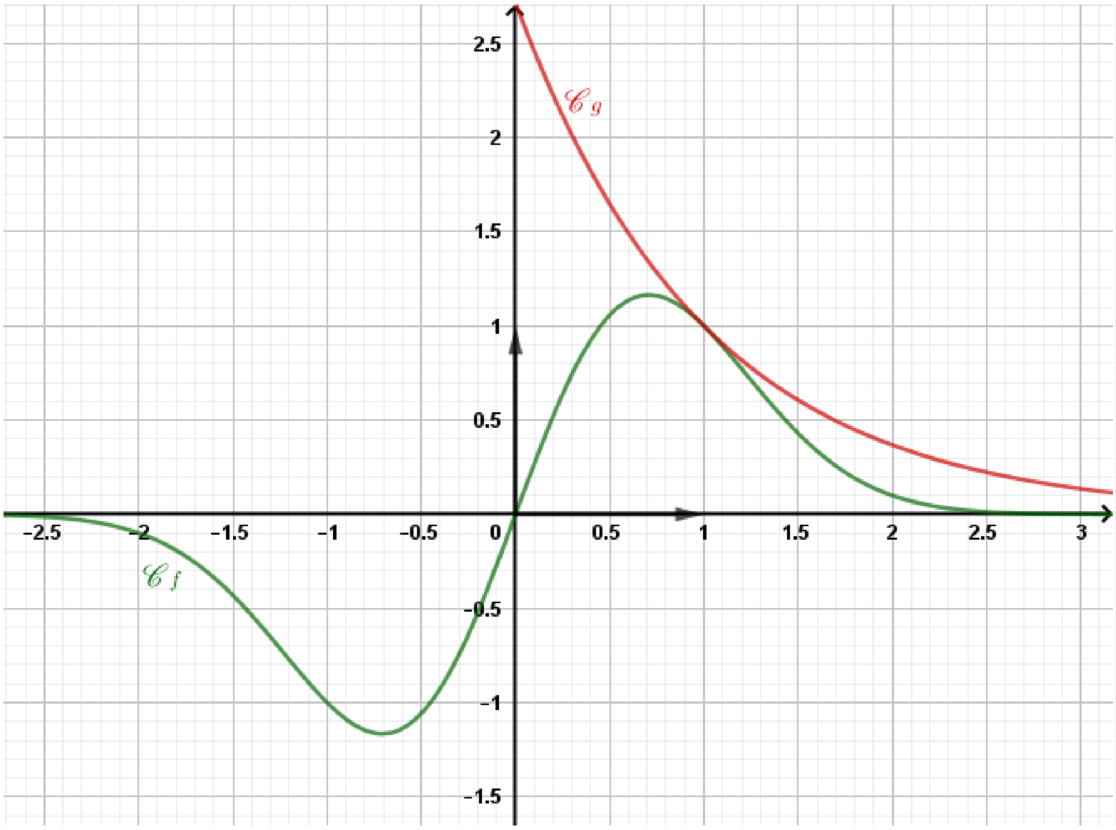
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1) Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

2) Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;0]$, $f(x) < g(x)$.

3) Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.

On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln(x) - x^2 + x$.

a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leq g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leq 0$.

On admet que pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et en $+\infty$ ne sont pas attendues.)

c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.

4) a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

b) Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.

c) Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1) Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right)dx.$

3) Interpréter graphiquement ce résultat.

<u>EXERCICE 2</u> : ***A faire uniquement par les élèves qui <u>ne suivent pas</u> la spécialité Math.*** *(8 points)*

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1\,;2\,;0)$, $B(1\,;2\,;4)$ et $C(-1\,;1\,;1)$.

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$
et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

b) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

c) Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

Démontrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

<u>EXERCICE 2</u> : ***A faire sur <u>une copie à part</u>, uniquement par les élèves qui <u>suivent</u> la spécialité Math***. *(8 points)*

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de cryptage, dite " chiffrement de Hill ", dans un cas particulier. Cette méthode nécessite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & s \end{pmatrix}$, dont les coefficients sont des nombres entiers choisis entre 0 et 25, et tels que $as - bc$ soit premier avec 26.

Cette matrice est connue seulement de l'émetteur et du destinataire.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A : quelques résultats.

1) On considère l'équation (E): $9d - 26m = 1$, où d et m désignent deux entiers relatifs.

   a) Donner une solution simple de cette équation, de sorte que d et m soient des nombres entiers compris entre 0 et 3.

   b) Démontrer que le couple (d, m) est solution de l'équation (E) si et seulement si :

$$9(d - 3) = 26(m - 1).$$

   c) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les nombres entiers relatifs de la forme :

$$\begin{cases} d = 26k + 3 \\ m = 9k + 1 \end{cases}, \qquad avec\ k \in \mathbb{Z}.$$

2) a) Soit n un nombre entier. Démontrer que si $n = 26k - 1$, avec k entier relatif, alors n et 26 sont premiers entre eux.

   b) En déduire que les nombres $9d - 28$, avec $d = 26k + 3$ et $k \in \mathbb{Z}$, sont premiers avec 26.

Partie B : cryptage et décryptage.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

On utilisera le tableau suivant pour la correspondance entre les lettres et les nombres.

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

<table>
<tr><th>Méthode de cryptage (pour un mot comportant un nombre pair de lettres)</th><th colspan="2">Exemple : avec le mot MATH</th></tr>
<tr><td>1. On regroupe les lettres par paires.</td><td colspan="2">MA TH</td></tr>
<tr><td>2. On remplace les lettres par les valeurs associées à l'aide du tableau précédent, et on place les couples de nombres obtenus dans des matrices colonne.</td><td>$C_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$</td><td>$C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>3. On multiplie les matries colonne par la gauche par la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$</td><td>$AC_1 = \begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix}$</td><td>$AC_2 = \begin{pmatrix} 199 \\ 154 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>4. On remplace chaque coefficient des matrices colonne obtenues par leur reste dans la division euclidienne par 26.</td><td>$108 = 4 \times 26 + 4$
$84 = 3 \times 26 + 6$
$On\ obtient\ :\ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>5. On utilise le tableau de correspondance entre lettres et nombres pour obtenir le mot crypté.</td><td colspan="2">EG RY</td></tr>
</table>

1) En cryptant par cette méthode le mot "PION", on obtient "LZWH". En détaillant les étapes pour les lettres "ES", crypter le mot "ESPION".

2) Méthode de décryptage

Notation : lorsqu'on manipule des matrices de nombres entiers relatifs, on peut utiliser la notation " ≡ " pour parler de congruence coefficient par coefficient. Par exemple, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ modulo } 26 \text{ car } 108 \equiv 4 \text{ modulo } 26 \quad \text{et} \quad 84 \equiv 6 \text{ modulo } 26.$$

Soient a, b, x, y, x' et y' des nombres entiers relatifs.

On sait que si $x \equiv x'$ modulo 26 et $y \equiv y'$ modulo 26 alors :

$$ax + by \equiv ax' + by' \text{ modulo } 26.$$

Ce résultat permet d'écrire que, si A est une matrice 2×2, et B et C sont deux matrices colonne 2×1, alors :

$$B \equiv C \text{ modulo } 26 \quad \text{implique} \quad AB \equiv AC \text{ modulo } 26.$$

a) Etablir que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.

b) Décrypter le mot : $XQGY$.