

1) D'après les données, $M \in (BDL)$

- L et M sont aussi dans le plan de la face supérieure EFGH du cube
donc $(BDL) \cap (EFGH) = (LM)$
- B et D sont dans le plan de la face inférieure ABCD du cube
donc $(BDL) \cap (ABCD) = (BD)$
- les plans des faces inférieures et supérieures sont parallèles
on en déduit que les droites d'intersection du plan (BDL)
avec ces plans des faces sont parallèles.

Ainsi $(LM) \parallel (BD)$

2) D'après une donnée, on a $\vec{FL} = \frac{2}{3} \vec{FE}$

De plus, dans le repère $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$

$$F \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

En posant $L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on a $\vec{FL} \begin{pmatrix} x-6 \\ y-0 \\ z-6 \end{pmatrix} = \vec{FE} \begin{pmatrix} 0-6 \\ 0-0 \\ 6-6 \end{pmatrix}$

$\vec{FL} = \frac{2}{3} \vec{FE}$ s'écrit avec des coordonnées:

$$\begin{cases} x-6 = \frac{2}{3}(-6) \\ y = \frac{2}{3}(0) \\ z-6 = \frac{2}{3}(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6 = -4 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases}$$

d'où $L(2; 0; 6)$

3) a) $\vec{BL} \begin{pmatrix} 2-6 \\ 0-0 \\ 6-0 \end{pmatrix} \quad \vec{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ainsi (BL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 6-4k \\ y = 0 \\ z = 6k \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$
(en prenant B(6; 0; 0) comme point)

b) S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK)
Ses coordonnées vérifient simultanément:

$$\begin{cases} x = 6-4k \\ y = 0 \\ z = 6k \end{cases}$$

$x = y = 0$ (puisque S est sur l'axe (Oz))

$$\begin{cases} 6-4k = 0 \\ y = 0 \\ z = 6k \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \frac{6}{4} \\ y = 0 \\ z = 6k \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ y = 0 \\ z = 6(\frac{3}{2}) \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 9 \end{cases}$$

4) a) B, D, L ne sont pas alignés, donc $\vec{BD}$ et $\vec{BL}$ forment un système de vecteurs directeurs du plan (BDL)

$$\vec{BD} \begin{pmatrix} 0-6 \\ 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BD} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BD} \cdot \vec{n} = (-6)(3) + (6)(3) + 0 = 0$$

donc $\vec{BD} \perp \vec{n}$

$$\vec{BL} \begin{pmatrix} 2-6 \\ 0-0 \\ 6-0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BL} \cdot \vec{n} = (-4)(3) + 0 + 6(2) = 0$$

donc $\vec{BL} \perp \vec{n}$

Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDL) donc il est normal à (BDL).

b) (BDL) a comme équation $3x + 3y + 2z + d = 0$
 étant donné qu'il a comme vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De plus $B(6; 0; 0) \in (BDL)$ donc $3(6) + 3(0) + 2(0) + d = 0$
 $18 + d = 0$
 $d = -18$

Déjà, une équation de (BDL) est $3x + 3y + 2z - 18 = 0$.

c) les coordonnées de M vérifient simultanément:

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z - 18 = 0 & (\text{équation de (BDL)}) \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{cases} \text{ système d'équations de (EH)}$$

$$\begin{cases} 3(0) + 3y + 2(6) - 18 = 0 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 6 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{cases}$$

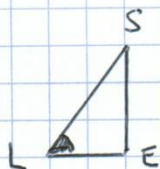
d'où:
 $M(0; 2; 6)$

5) $EL = EM = 2$ (d'après les coordonnées de E, L, M)
 $ES = 3$ (d'après les coordonnées de E, S)

Donc $A_{ELM} = \frac{1}{2} \times EL \times EM = 2$ (on a un triangle rectangle en E)

donc $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 3$ $V = 2 \text{ m}^3$

6)

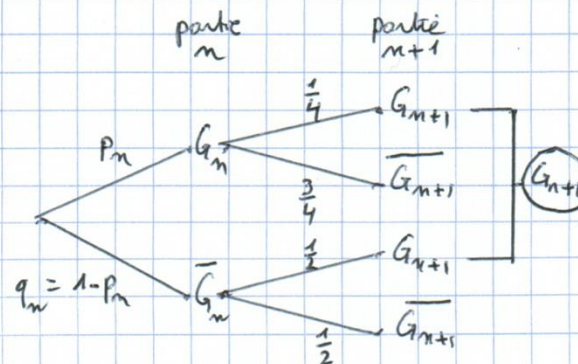
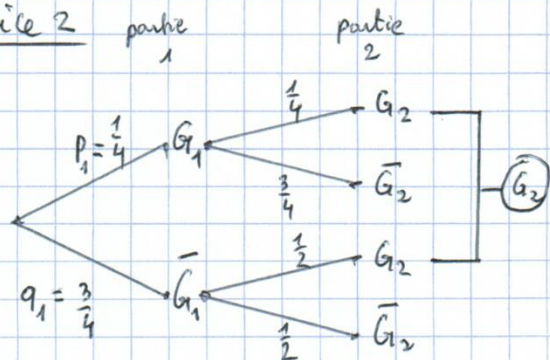


$$\tan(\widehat{SLE}) = \frac{SE}{LE} = \frac{3}{2}$$

$$\arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56,3^\circ$$

donc la condition
 $55^\circ \leq \widehat{SLE} \leq 60^\circ$
 est respectée.

Exercice 2



1) $p_2 = p(G_2)$
 $p_2 = p(G_1 \cap G_2) + p(\bar{G}_1 \cap G_2)$
 $p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$
 $p_2 = \frac{1}{16} + \frac{6}{16} \quad p_2 = \frac{7}{16}$

2) $p_{n+1} = p(G_{n+1})$ $p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\bar{G}_n \cap G_{n+1})$
 $p_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} (1 - p_n)$ $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3) A la vue des valeurs de p_n du tableau, on conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,4$

4) $u_n = p_n - \frac{2}{5}$ donc $p_n = u_n + \frac{2}{5}$

a) $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5}$

$$u_{n+1} = \left(-\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{5}$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{4} \left(u_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \quad u_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n - \frac{1}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10}$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{4} u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de 1^{er} terme $u_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$ et de raison $q = -\frac{1}{4}$

b) $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ $u_n = -\frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

et comme $p_n = u_n + \frac{2}{5}$ donc $p_n = -\frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$

donc par produit et par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{5}$

On en déduit que pour n assez grand, la probabilité de gagner une partie est $\frac{2}{5}$.

Exercice 3

1) On cherche x tel que largeur = hauteur

$$2x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x} - 2)$$

$$4x = e^x + e^{-x} - 2$$

$$0 = e^x + e^{-x} - 4x - 2, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$$

2) a) $f(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$
 $f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 4 \right) + e^{-x} - 2$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 4 \right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

} donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$

d'où par produit et par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 4 \right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - 2 = -2$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) a) $f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$

b) $f'(x) = 0$
 $e^x - e^{-x} - 4 = 0$
 $e^x (e^x - e^{-x} - 4) = 0$
 $(e^x)^2 - 1 - 4e^x = 0$

c) On pose $X = e^x$.

On a $X^2 - 4X - 1 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-1)$$

$$\Delta = 20$$

racines réelles

$$X_1 = 2 + \sqrt{5}$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux

Seule $X_1 = 2 + \sqrt{5}$ est positive; d'où

$$e^x = 2 + \sqrt{5}$$

$$x = \ln(2 + \sqrt{5}) \quad (\text{admis})$$

$$\approx 1,44$$

4) a)

	0	$\ln(2 + \sqrt{5})$	$+\infty$
signe de f'		-	+
Variation de f	0	$\nearrow$	$\nearrow +\infty$

$$f(\ln(2 + \sqrt{5})) \approx -3,30$$

$$\begin{aligned} f(\ln(2 + \sqrt{5})) &= e^{\ln(2 + \sqrt{5})} + \frac{1}{e^{\ln(2 + \sqrt{5})}} - 4 \ln(2 + \sqrt{5}) - 2 \\ &= 2 + \sqrt{5} + \frac{1}{2 + \sqrt{5}} - 4 \ln(2 + \sqrt{5}) - 2 \approx -3,30 \end{aligned}$$

b) • Sur $[0; \ln(2+\sqrt{5})]$, f est strictement décroissante et $f(0)=0$, donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution strictement positive.

- Sur $[\ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$
 - f est continue
 - f est strictement croissante
 - $0 \in [f(\ln(2+\sqrt{5})); +\infty[$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in]\ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$

5) a)

	m	a	b	b-a
Entrée dans le Tant que		2	3	1
	2,5		2,5	
2 ^e tour de boucle Tant que				0,5
	2,25	2,25		
3 ^e tour de boucle				0,25
	2,375	2,375		
4 ^e tour de boucle				0,125
	2,4375	2,4375		
				0,0625

la condition de maintien dans la boucle Tant que est devenue fausse, donc l'algorithme s'arrête.

- a) contient 2,4375
- b) contient 2,5

b) On peut dire que la valeur α telle que $f(\alpha)=0$ est dans l'intervalle $[2,4375; 2,5]$ (c'est l'algorithme de dichotomie)

6) (E') $e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0$
 Faisons un changement de variable:
 Posons $x = \frac{t}{39}$ $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$

On a vu que

$$2,4375 < x < 2,5$$

$$2,4375 < \frac{t}{39} < 2,5$$

$$2 \times 39 \times 2,4375 < 2t < 2 \times 39 \times 2,5$$

$$190,12 < 2t < 195$$

Ainsi la hauteur de la Gateway Arch est entre 190m et 195m

Exercice 4

1) $OC = OA \times OB$
 $|z_{OC}| = |z_{OA}| \times |z_{OB}|$

donc $|z_c| = |z_A| \times |z_B|$

$$\begin{aligned} |z_c|^2 &= |z_A|^2 \times |z_B|^2 \\ y^2 + 1^2 &= (1^2 + 1^2)(x^2 + 1^2) \\ y^2 + 1 &= (1+1)(x^2+1) \\ y^2 + 1 &= 2x^2 + 2 \\ \underline{y^2} &= \underline{2x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_c &= y + i & z_c &= a + ib \\ & & \text{avec } a &= y \\ & & b &= 1 \\ \text{donc } |z_c| &= \sqrt{y^2 + 1} \end{aligned}$$

2) Pour x allant de 1 à 10 faire
 Pour y allant de 1 à 10
 Si $y^2 = 2x^2 + 1$
 Afficher x et y
 Fin Si
 Fin Pour
 Fin Pour

3) a) $x = 2$ et $y = 3$ donc $\begin{aligned} z_A &= 1 + i \\ z_B &= 2 + i \\ z_C &= 3 + i \end{aligned}$

$$|z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

b) $\begin{aligned} OC &= |z_c| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\ OA &= |z_A| = \sqrt{2} \\ OB &= |z_B| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} OC &= |z_c| \\ OA &= |z_A| \\ OB &= |z_B| \end{aligned}} \right\} \text{donc } OA \times OB = \sqrt{2} \sqrt{5} = \sqrt{10}$
 Ainsi $OC = OA \times OB$

c) $\begin{aligned} z_B z_C &= (2+i)(3+i) \\ z_B z_C &= 6 + 2i + 3i - 1 \\ z_B z_C &= 5 + 5i \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} z_B z_C &= (2+i)(3+i) \\ z_B z_C &= 6 + 2i + 3i - 1 \\ z_B z_C &= 5 + 5i \end{aligned}} \right\} \text{donc } z_B z_C = 5z_A$
 $5z_A = 5(1+i) = 5 + 5i$

$$\begin{aligned} \arg(z_B z_C) &= \arg(z_B) + \arg(z_C) \\ &= (\vec{u}, \vec{OB}) + (\vec{u}, \vec{OC}) \\ \arg(5z_A) &= \arg(5) + \arg(z_A) \\ &= 0 + (\vec{u}, \vec{OA}) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \arg(z_B z_C) &= \arg(z_B) + \arg(z_C) \\ \arg(5z_A) &= \arg(5) + \arg(z_A) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} &\text{comme } z_B z_C = 5z_A \\ &\text{alors } (\vec{u}, \vec{OB}) + (\vec{u}, \vec{OC}) = (\vec{u}, \vec{OA}) \end{aligned}$$

4) a) $(\vec{u}, \vec{OB}) + (\vec{u}, \vec{OC}) = (\vec{u}, \vec{OA})$
 $\arg(z_B) + \arg(z_C) = \arg(z_A) \quad \text{mod } 2\pi$
 $\arg(z_B z_C) - \arg(z_A) = 0 \quad \text{mod } 2\pi$
 $\arg\left(\frac{z_B z_C}{z_A}\right) = 0 \quad \text{mod } 2\pi$
 $\arg\left(\frac{(1+i)(y+i)}{(1+i)}\right) = 0 \quad \text{mod } 2\pi$

Posons $Z = \frac{(x+i)(y+i)}{1+i}$

$$Z = \frac{xy - 1 + i(x+y)}{1+i}$$

$$Z = \frac{[(xy-1) + i(x+y)] [1-i]}{1^2 + 1^2}$$

$$Z = \frac{(xy-1) - i(xy-1) + i(x+y) - i^2(x+y)}{2}$$

$$Z = \frac{(xy-1) + (x+y) + i[-xy+1+x+y]}{2}$$

$$Z = \frac{xy-1+x+y}{2} + i \frac{-xy+1+x+y}{2}$$

$$\arg(Z) = 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Im}(Z) = 0 \\ \text{et } \operatorname{Re}(Z) > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Im}(Z) = 0 \\ \text{et } \operatorname{Re}(Z) > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -xy+1+x+y = 0 \\ \text{et } xy-1+x+y > 0 \end{array}$$

On a donc bien $x+y-xy+1=0$

b) On suppose que les deux conditions $y^2 = 2x^2 + 1$ (quadratique) et $x+y-xy+1=0$ sont résolues

• Puisque x et y sont supérieurs à 1, donc $y^2 > 0$ et $2x^2 + 1 > 0$
 donc Si $y^2 = 2x^2 + 1$
 alors $y = \sqrt{2x^2 + 1}$

• Puisque $x+y-xy+1=0$
 alors $y - xy = -x - 1$
 $y(1-x) = -x-1$
 $y = \frac{-x-1}{1-x}$

$y = \frac{x+1}{x-1}$ pour $x \neq 1$

5) Les deux conditions sont vraies simultanément implique que

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x^2 + 1} \\ y = \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$$

Etudions le sens de variation de la fonction h sur $]1; +\infty[$

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad \text{donc} \quad h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$h'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

$h'(x)$ est la somme de deux nombres strictement positifs donc $h'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$. Ainsi h est strictement croissante sur $]1; +\infty[$. On montre que $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

On utilise le TVI pour prouver que $h(x)=0$ a une unique solution sur $]1; +\infty[$. (7)
 Cette solution a déjà été étudiée à la question 3). C'est $x=2$.

Exercice 4 bis

- 1) En utilisant le théorème de Pythagore dans les trois triangles rectangles, on a:

$$a^2 = 1^2 + 1^2$$

$$b^2 = 1^2 + u^2$$

$$c^2 = 1^2 + v^2$$

Si u et v sont tels que $ab = c$
alors u et v sont tels que $a^2 b^2 = c^2$

En remplaçant $a^2 = 2$, $b^2 = 1 + u^2$ et $c^2 = 1 + v^2$ on a:

$$2(1 + u^2) = 1 + v^2$$

$$2 + 2u^2 = 1 + v^2$$

$$1 = v^2 - 2u^2 \quad (\text{équation (E)})$$

- 2) Pour u allant de 1 à 1000 faire

Pour v allant de 1 à 1000

Si $1 = v^2 - 2u^2$

Afficher u et v

Fin Si

Fin Pour

Fin Pour.

- 3) a) $v^2 - 2u^2 = 1$
 $v^2 - 2u^2 > 0$
 $v^2 > 2u^2 > u^2$ ce qui implique
que $v > u$ car u et v sont positifs

- b) Si $n \equiv 0 \pmod{2}$ alors $n^2 \equiv 0^2 \pmod{2}$
 $n^2 \equiv 0 \pmod{2}$

Donc si n est pair alors n^2 est pair.

Si $n \equiv 1 \pmod{2}$ alors $n^2 \equiv 1^2 \pmod{2}$
 $n^2 \equiv 1 \pmod{2}$

Donc si n est impair alors n^2 est impair.

Conclusion: n et n^2 ont la même parité.

- c) Puisque $v^2 - 2u^2 = 1$ alors $v^2 - 2u^2 \equiv 1 \pmod{2}$
Or $2u^2 \equiv 0 \pmod{2}$ (puisque $2 \equiv 0 \pmod{2}$)
d'où $v^2 \equiv 1 \pmod{2}$
Or v^2 a la même parité que v (d'après la question 3b)) donc $v \equiv 1 \pmod{2}$.
Ainsi v est impair.

- d) $v^2 - 2u^2 = 1$
 $v^2 - 1 = 2u^2$
 $(v-1)(v+1) = 2u^2$

On sait, d'après la question 3c) que $v \equiv 1 \pmod{2}$

donc $v-1 \equiv 0 \pmod{2}$ d'où $v-1$ est divisible par 2

$$v-1 = 2k \text{ où } k \in \mathbb{N}$$

et $v+1 \equiv 0 \pmod{2}$ d'où $v+1$ est divisible par 2

$$v+1 = 2k' \text{ où } k' \in \mathbb{N}$$

Donc $2k \times 2k' = 2u^2$

$$2kk' = u^2$$

Or, d'après la question 3b)

Ainsi u^2 est pair (divisible par 2)

u^2 et u ont la même parité.

Donc u est pair.

4) a) Si X est une solution de (E) alors:

$$v^2 - 2u^2 = 1 \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

De plus $AX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3u+2v \\ 4u+3v \end{pmatrix} \quad AX = \begin{pmatrix} 3u+2v \\ 4u+3v \end{pmatrix}$

AX est solution de E $\Leftrightarrow (4u+3v)^2 - 2(3u+2v)^2 = 1$
C'est la relation qu'on doit établir, partant de $v^2 - 2u^2 = 1$

$$v^2 - 2u^2 = 1$$

$$9v^2 - 8v^2 + 16u^2 - 18u^2 = 1$$

$$16u^2 + 9v^2 - 18u^2 - 8v^2 = 1$$

$$16u^2 + 24uv + 9v^2 - 18u^2 - 24uv - 8v^2 = 1$$

$$16u^2 + 24uv + 9v^2 - 2(9u^2 + 12uv + 4v^2) = 1$$

$$(4u+3v)^2 - 2(3u+2v)^2 = 1$$

AX est solution de (E)

b) X étant une solution de (E),
soit $P(n)$ la propriété : $A^n X$ est une solution de (E)

• Initialisation : Pour $n=0$ on a $A^0 X = I_2 X = X$

Or X est une solution de (E).

Donc la propriété $P(0)$: $A^0 X$ est une solution de (E) est vraie.

• Hérité : Supposons que pour un certain entier naturel k , on ait $A^k X$ est une solution de (E)

Montrons qu'alors $A^{k+1} X$ est une solution de (E)

On a démontré à la question 4)a) que si une matrice $M = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est solution de (E) alors AM est solution de (E)

(on change la notation de la matrice $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ pour faciliter la compréhension de ce qui suit.)

Donc si M est solution alors AM est solution

Prenons $M = A^k X$

Donc, d'après ce qui précède, $AM = A A^k X$ est solution
 $A^{k+1} X$ est solution.

L'hérité est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n X$ est une solution de (E)

c) On sait $[A] = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $[B] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (on a pris $u=2$ et $v=3$ dans l'algorithme)

On calcule $[A]^n * [B]$ pour différentes valeurs de $n \in \mathbb{N}$, jusqu'à trouver le 2^e élément de la matrice colonne résultat tel que $v > 10000$.

On trouve, pour $n=6$, $v = \underline{19601}$