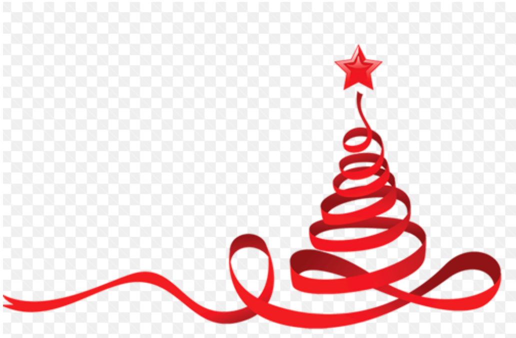
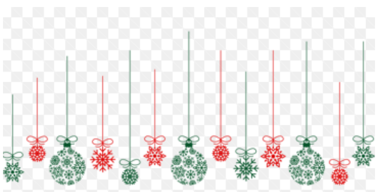
Classes de Terminale 4-5-6-7 S	**DEVOIR DE MATHEMATIQUES n° 3**	*Vendredi 14 décembre 2018*
		Durée : 4 heures.
		Calculatrice autorisée

La qualité de la rédaction, la clarté d'expression et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des résultats.
Tout résultat ou conclusion doit être justifié(e) (sauf indication contraire).



<u>EXERCICE 1</u> : ***A faire par tous les élèves*** (5 points)
Dire pour chacune des propositions suivantes si elle est vraie ou fausse en le justifiant.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-3x+2}{x^2+2x-3} = +\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{2x-1}{x^2} = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2e^{-3x+1}}{x^2} = +\infty$
4. $si\ f(x) = 2x^3 + x + \frac{4}{x}$ $\qquad alors\ \ f\,'(x) = 6x^2 + 1 + \frac{4}{x^2}$
5. $si\ f(x) = xsin(x)$ $\qquad alors\ \ f\,'(x) = xcos(x)$
6. $si\ f(x) = cos^2(x)$ $\qquad alors\ \ f\,'(x) = -\sin(2x)$
7. $si\ f(x) = \frac{e^x-3}{e^x-1}$ $\qquad alors\ \ f\,'(x) = \frac{2}{(e^x-1)^2}$
8. $e^{7x-2} - e^{6x} = 0$ a pour ensemble solution $S = \{2\}$
9. $e^{x^2-1} = 1$ a pour ensemble solution $S = \{1\}$
10. $\left(\frac{e^{-3x}}{e^5}\right)^3 > e^{-2x+3} \times e^{6x}$ a pour ensemble solution $S = \left]\frac{-18}{13}; +\infty\right[$



EXERCICE 2 ***Uniquement pour les élèves <u>qui ne suivent pas</u> la spécialité math*** (5 points)

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{9}{6-v_n} \end{cases}$

Partie A :

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite (v_n), du rang 0 au rang n. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en le justifiant.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**

Demander n
v prend la valeur 1
Pour i allant de 1 à n
   v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
Fin pour
 	
Afficher v
	Demander n
	Pour i allant de 1 à n
	   v prend la valeur 1
	   Afficher v
	   v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
	Fin pour
		Demander n
		v prend la valeur 1
		Pour i allant de 1 à n
		   Afficher v
		   v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
		Fin pour
		
		Afficher v

2. Pour n = 10 on obtient l'affichage suivant :

1,000	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714	2,739

Pour n = 500, les derniers termes affichés sont :

2,9939086	2,9939210	2,9939333	2,9939455	2,9939577	2,9939698	2,9939819	2,9939940	2,9940060	2,9940179

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$

   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \frac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$

   c) A l'aide des questions a) et b), déterminer le sens de variation de (v_n).

   d) En déduire que (v_n) est convergente.

Partie B :

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = \frac{1}{v_n-3}$.

1) Démontrer que (w_n)est une suite **arithmétique** de raison $r = -\frac{1}{3}$.

2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3) Déterminer la limite de la suite (v_n).

EXERCICE 2 bis : ***Uniquement pour les élèves <u>qui suivent</u> la spécialité math. Cet exercice devra être rédigé sur une copie séparée*** (5 points)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :        a est un entier naturel
                   b est un entier naturel
                   c est un entier naturel
Initialisation :   c ← 0
                   Demander la valeur de a
                   Demander la valeur de b
Traitement :       Tant que a > b
                          c ←c+1
                          a ←a-b
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher c
                   Afficher a
```

1) Faire fonctionner cet algorithme avec a =13 et b = 4 en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2) Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Etape 1 : A la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Etape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.

Etape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1) Coder la lettre U.
2) Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1) Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$.

2) Démontrer alors l'équivalence : $9m + 5 \equiv p \quad [26] \iff m \equiv 3p - 15 \quad [26]$.

3) Décoder alors la lettre B.

EXERCICE 3 : ***A faire par tous les élèves*** (5 points)

Partie I

Soit g la fonction définie sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1) Déterminer la limite de g en + ∞.

2) Dresser le tableau de variation de g.

3) Justifier que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution notée α .
Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

4) En déduire le tableau des signes de $g(x)$.

Partie II

Soit A la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $A(x) = \frac{x}{e^x+1}$

1) Démontrer que $A'(x)$ *et* $g(x)$ sont de même signe.

2) En déduire les variations de A sur [0 ; + ∞ [(on ne demande pas le calcul de la limite).

Partie III

Soit f la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$

On donne, en annexe à compléter, sa courbe représentative C dans un repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
Soit a un réel positif. On appelle M le point de C d'abscisse a, P le projeté orthogonal de M sur (Ox) et Q le projeté orthogonal de M sur (Oy).
Déterminer la position M_0 de M pour que l'aire du rectangle OPMQ soit maximale. Placer M_0 sur la figure.

EXERCICE 4 : ***A faire par tous les élèves*** (5 points)

Partie A :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $2X^2 + X - 1 = 0$.
2. Donner la forme factorisée de $2X^2 + X - 1$.

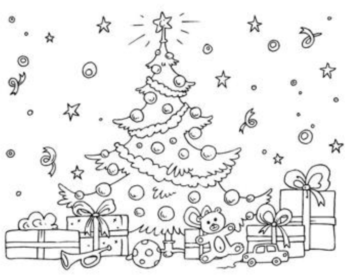
Partie B :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

1. a) Montrer que f est périodique de période 4π.
   b) Etudier la parité de f.
   c) En déduire que l'on peut étudier f sur $[\,0\,;\,2\pi\,]$, puis expliquer comment on peut tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer $f\,'(x)$
   b) A l'aide de l'égalité : $1 + \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$, et de la question 2 partie A, montrer *que* $f\,'(x) = 2\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)$

3. Etudier les variations de f sur $[\,0\,;\,2\pi\,]$.



Annexe (à rendre avec la copie)

NOM et Prénom : ………………………………………………………………………………

Classe : ……………………….