

Exercice 1

Ce qui est FAUX est prouvé par un contre-exemple
Ce qui est VRAI est prouvé par une démonstration générale
(car un exemple VRAI ou quelques exemples VRAIS ne suffisent pas à démontrer une généralité)

1) Contre exemple:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x$
En effet, pour tout $x > 0$, $f(x) < 0$ et $\frac{2}{x} > 0$ donc $f(x) < \frac{2}{x}$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ est FAUX

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{2}{x}) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{3}{x}) = 2$
 $2 + \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$ pour tout $x > 0$ } d'après le théorème d'encadrement
(ou "des gendarmes") $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ est VRAI

3) Contre exemple:

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ est FAUX

4) Contre exemple:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$
et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$
 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ est FAUX

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
 $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \geq 1$ } d'après le théorème de comparaison
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ est VRAI

6) Contre exemple:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+1$
et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x+2$
on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a, +\infty[$ est FAUX

Exercise 2

1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = +\infty$

b) $u'(x) = 6x^2 - 6x$
 $u'(x) = 6x(x-1)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
signe de $6x$	-	0	+	+
signe de $x-1$	-	0	-	+
signe de $u'(x)$	+	0	-	+
variations de u		$\nearrow -1$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$

c) Sur $]-\infty; 1]$, le maximum de u est -1 donc l'équation $u(x) = 0$ n'y a pas de solution.

Sur $[1; +\infty[$
 u est continue
 u est strictement croissante
 $0 \in [-2; +\infty[$

donc d'après le théorème de bijection, l'équation $u(x) = 0$ a une solution unique α dans $[1; +\infty[$

Donc: $u(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$

A la calculatrice: $1,677 < \alpha < 1,678$

d) D'après le tableau de variations on a:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $u(x)$	-	0	+

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^3}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2}$
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -1} (1-x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow -1} (1+x^3) = 0^+$
 donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la courbe C_f a une asymptote horizontale d'équation $y=0$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ donc la courbe C_f a une asymptote verticale d'équation $x=-1$

c) f est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables:

$$f'(x) = \frac{(-1)(1+x^3) - (1-x)(3x^2)}{(1+x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1-x^3-3x^2+3x^3}{(1+x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{u(x)}{(1+x^3)^2} \quad \text{avec } u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

d) En utilisant le signe de $u(x)$ vu à la question 1) d):

x	-1	α	$+\infty$
signe de $u(x)$		-	+
signe de $(1+x^3)^2$		+	+
signe de $f'(x)$		-	+
variations de f		$+\infty$	0

$f(x)$

e) On a, en remplaçant x par α dans $f(x)$:

$$f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha^3}$$

D'autre part on nous demande de montrer que

$$f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$$

Cela sera fait si on montre que $\frac{2}{3(\alpha^2+1)} = \frac{1}{1+\alpha^3}$

Montrons ce résultat:

on a donc énoncé la remarque $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$
d'où $2\alpha^3 = 3\alpha^2 + 1$

$$2\alpha^3 + 2 = 3\alpha^2 + 3$$

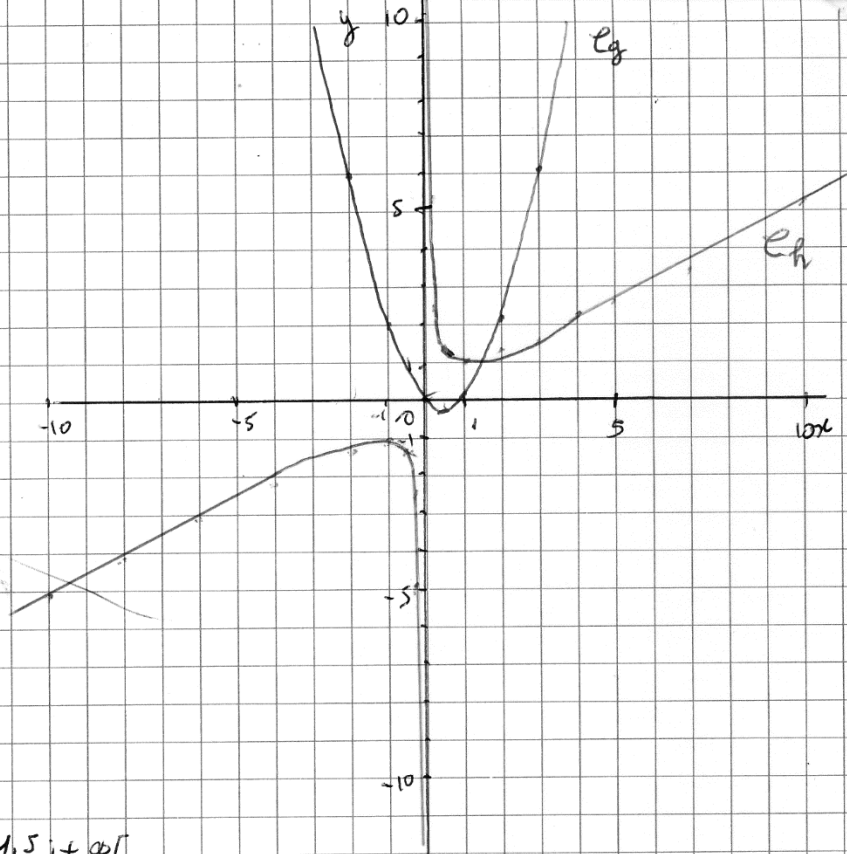
$$2(\alpha^3 + 1) = 3(\alpha^2 + 1)$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{\alpha^2+1} = \frac{1}{\alpha^3+1}$$

Conclusion: On a bien $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$

3) a) $g(x) = x(x-1)$
 $g(x) = x^2 - x$

$h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}$



on conjecture que :

- Pour $x \in]-\infty; 0[\cup]1,5; +\infty[$
 $\mathcal{C}_h$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$
- Pour $x \in]0; 1,5[$
 $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$

b) $g(x) - h(x) = x(x-1) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$g(x) - h(x) = x^2 - x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$

$g(x) - h(x) = x^2 - \frac{3x}{2} - \frac{1}{2x}$

$g(x) - h(x) = \frac{2x^3}{2x} - \frac{3x^2}{2x} - \frac{1}{2x}$

$g(x) - h(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{2x}$

On a $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ donc $g(x) - h(x) = \frac{u(x)}{2x}$

En utilisant le signe de $u(x)$ vu à la question 1) d)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
signe de $u(x)$	-				-	ϕ	+
signe de $2x$	-				+	ϕ	+
signe de $g(x) - h(x)$	+				-	ϕ	+

c) • Si $x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[$ alors $g(x) - h(x) > 0$
 $g(x) > h(x)$
 $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_h$

• Si $x \in]0; \alpha[$ alors $g(x) - h(x) < 0$
 $g(x) < h(x)$
 $\mathcal{C}_g$ est en-dessous de $\mathcal{C}_h$