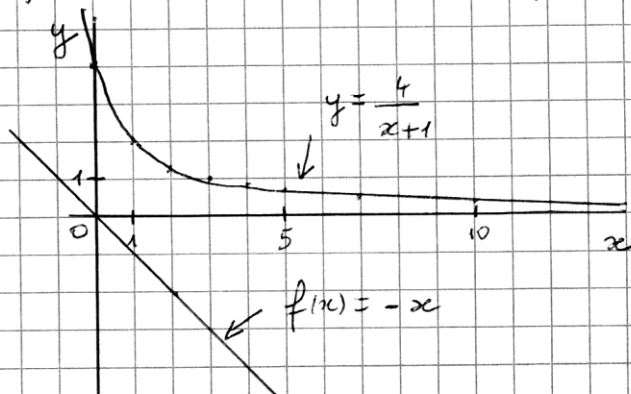


Exercice 1

1) Donnons un contre exemple:



Pour tout réel $x > 0$, $-x < \frac{4}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \underline{\text{FAUX}}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right) = 1$$

$$1 - \frac{4}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{4}{x}$$

pour tout réel $x > 0$

donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \underline{\text{VRAI}}$$

$$3) \quad a) \quad -1 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{donc, par produit,} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \underline{\text{VRAI}}$$

$$b) \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

donc la suite (u_n) est une suite géométrique

de 1^{er} terme $u_0 = -5$

de raison $q = \frac{1}{2}$

$$\text{donc} \quad S_n = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_n = -5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_n = -10 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \quad \text{donc par somme et par produit,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -10 \quad \underline{\text{VRAI}}$$

Exercice 2

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (4x-1) = 3 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x-1) = 0^- \end{array} \right\} \text{ par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{4x-1}{x-1} = -\infty$$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ donc C_f a une asymptote horizontale d'équation $y = 4$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ donc C_f a une asymptote verticale d'équation $x = 1$

3) Etudions le signe de $f(x) - 4$

$$f(x) - 4 = \frac{4x-1}{x-1} - 4$$

$$f(x) - 4 = \frac{4x-1}{x-1} - \frac{4(x-1)}{x-1}$$

$$f(x) - 4 = \frac{4x-1-4x+4}{x-1}$$

$$f(x) - 4 = \frac{3}{x-1}$$

x	$-\infty$	1
signe de 3	+	
signe de $x-1$	-	
signe de $\frac{3}{x-1}$	-	

Donc, pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) - 4 < 0$

$f(x) < 4$
 C_f est en-dessous de son asymptote horizontale.

$$4) f'(x) = \frac{4(x-1) - (4x-1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x-4-4x+1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$	1
signe de -3	-	
signe de $(x-1)^2$	+	
signe de $f'(x)$	-	
variations de f	4	$-\infty$

$$5) y = f'(-1)x + b$$

$$f'(-1) = \frac{-3}{(-1-1)^2} = -\frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + b$$

Or $A(-1; f(-1))$ est sur la tangente
 $A(-1; 2.5)$ donc $2.5 = -\frac{3}{4}(-1) + b$ d'où $b = 1.75$

Donc la tangente a pour équation $y = -0.75x + 1.75$

(2)

Exercice 3

1) a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

b)

$$u'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$u'(x) = 6x(x-1)$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
signe de $6x$	-	0	+	+
signe de $x-1$	-	-	0	+
signe de $u'(x)$	+	0	-	+
variations de u				

c) Si $x \in]-\infty; 1]$ alors le maximum de la fonction u est $u(0) = -1$. Ce maximum est négatif.
 Donc $u(x) < 0$ donc $u(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Si $x \in [1; +\infty[$ alors u est continue.
 u est strictement croissante.
 $0 \in [-2; +\infty[$
 donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ a une solution unique α dans $[1; +\infty[$.

Conclusion : $u(x) = 0$ a une solution unique $x = \alpha$ dans $\mathbb{R}$.

A l'aide de la calculatrice $\alpha \approx 1,678$

d) D'après le tableau de variations, on déduit le tableau de signes suivant :

	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de $u(x)$	-	0	+

2) a) f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ $f'(x) = \frac{(-1)(1+x^3) - (1-x)(3x^2)}{(1+x^3)^2}$

$$f'(x) = \frac{-1 - x^3 - 3x^2 + 3x^3}{(1+x^3)^2} \quad f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2} = \frac{u(x)}{(1+x^3)^2}$$

b)

x	-1	α	$+\infty$
signe de $u(x)$	-	0	+
signe de $(1+x^3)^2$	+	+	+
signe de $f'(x)$	-	0	+

Exercice 4

- 1) Pour $n=0$ c'est à dire en 2018, le nombre d'arbres est 50 milliers. $U_0 = 50$
Diminuer de 5%, c'est multiplier par $1 - \frac{5}{100} = 0,95$
Replanter 3 milliers, c'est ajouter 3
Donc $U_{n+1} = 0,95 U_n + 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) a) Soit la propriété $U_n \leq 100$

• Initialisation

$U_0 = 50$ donc $U_0 \leq 100$ est vrai

• Hérité

Supposons que pour un certain entier naturel k , on a :

$$U_k \leq 100.$$

Montrons qu'alors $U_{k+1} \leq 100$.

$$\begin{aligned} U_k &\leq 100 \\ 0,95 U_k &\leq 95 \\ 0,95 U_k + 3 &\leq 98 \\ \text{donc } 0,95 U_k + 3 &\leq 100 \\ U_{k+1} &\leq 100. \end{aligned}$$

• Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a $U_n \leq 100$.

b) Soit la propriété $U_{n+1} > U_n$

• Initialisation $U_0 = 50$ et $U_1 = 0,95 \times 50 + 3 = 50,5$ donc $U_1 > U_0$

• Hérité : on suppose que $U_{k+1} > U_k$ où k est un certain entier

$$\begin{aligned} 0,95 U_{k+1} &> 0,95 U_k \\ 0,95 U_{k+1} + 3 &> 0,95 U_k + 3 \\ U_{k+2} &> U_{k+1} \end{aligned}$$

• Conclusion : Pour tout naturel n , $U_{n+1} > U_n$ donc (U_n) est croissante.

c) la suite (U_n) est majorée par 100 et est croissante donc elle converge.

3) a) $V_{n+1} = 60 - U_{n+1}$

$$V_{n+1} = 60 - (0,95 U_n + 3)$$

$$V_{n+1} = -0,95 U_n + 57$$

$$\text{or } U_n = 60 - V_n \text{ donc } V_{n+1} = -0,95(60 - V_n) + 57$$

$$V_{n+1} = 0,95 V_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

la suite (V_n) est donc géométrique de 1^{er} terme $V_0 = 60 - 50 = 10$ et de raison $q = 0,95$

b) $V_n = V_0 \times q^n$ $V_n = 10 \times 0,95^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $U_n = 60 - V_n$ donc $U_n = 60 - 10 \times 0,95^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) $2023 = 2018 + 5$ on calcule U_5 . $U_5 = 52,2621$ d'où 52 261 arbres

5) 10% du nombre d'arbres de la forêt en 2018, cela fait $\frac{10}{100} \times 50000 = 5000$
A la calculatrice on cherche le premier n tel que $U_n > 55$ milliers
On trouve $n = 14$. Cela correspond à l'année $2018 + 14 = 2032$.

6) $-1 < 0,95 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 60$$

Interprétation : En supposant que la croissance se poursuive de la même façon indéfiniment, le nombre d'arbre tendra vers 60000.

Exercice 4 bis

Partie A

1) 6 a comme diviseurs positifs 1, 2, 3, 6
 $1+2+3+6 = 12 = 2 \times 6$ donc 6 est parfait.

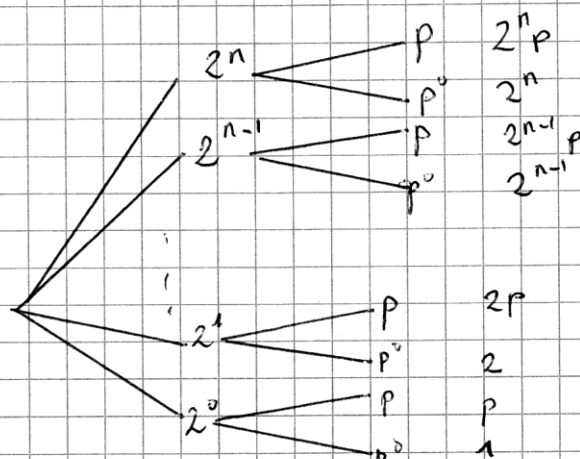
28 a comme diviseurs positifs 1, 2, 4, 7, 14, 28
 $1+2+4+7+14+28 = 56 = 2 \times 28$ donc 28 est parfait.

2) $a = 6$
 $a = 2^1 \times (2^{1+1} - 1)$

$a = 28$
 $a = 2^2 \times (2^{2+1} - 1)$

Partie B

1) a)



les diviseurs de a sont
 $1, p, 2, 2p, \dots, 2^{n-1}, 2^{n-1}p, 2^n, 2^n p = 2n+2$ diviseurs

$$\begin{aligned} \text{b) } 1+p+2+2p+\dots+2^{n-1}+2^{n-1}p+2^n+2^n p &= (1+2+\dots+2^{n-1}+2^n) + (1+2+\dots+2^{n-1}+2^n)p \\ &= 1 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{1-2^{n+1}}{1-2} p \\ &= (1+p) \times \frac{1-2^{n+1}}{-1} \\ &= (1+p) \times (2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2) a) } 1+p+2+\dots+2^n+2^n p &= (1+2^{n+1}-1) \times (2^{n+1}-1) \\ &= 2^{n+1} (2^{n+1}-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1+p+2+\dots+2^n+2^n p &= 2 \times [2^n (2^{n+1}-1)] \\ &= 2 \times [2^n p] \\ &= 2a \end{aligned}$$

la somme des diviseurs positifs de a est égale à $2a$.
 Donc a est parfait.

c) On a démontré que si M_m est un nombre premier alors $a = 2^{m-1} \times M_m$ est parfait.

Pour $n=7$, on a $M_7 = 2^7 - 1 = 127$ qui est un nombre de Mersenne premier. Donc $a = 2^{7-1} \times M_7 = 2^6 \times M_7$
 $a = 64 \times 127 = 8128$ est un nombre parfait. (5)