

Classes de Terminale 4-5-6-7 S	DEVOIR DE MATHEMATIQUES n° 2	Vendredi 16 novembre 2018
		Durée : 2 heures.
		Calculatrice autorisée

EXERCICE 1 A faire par tous les élèves (5 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Les réponses seront justifiées.

- 1) Si pour tout réel $x > 0$: $f(x) < \frac{4}{x+1}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- 2) Si pour tout réel $x > 0$: $1 - \frac{4}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{4}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
- 3) a) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.
- b) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -10$.

EXERCICE 2 A faire par tous les élèves (5 points)

f est une fonction définie sur $] -\infty ; 1[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x-1}$ et C_f sa courbe représentative.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$.
- 2) En déduire l'existence de deux asymptotes à C_f .
- 3) Etudier la position de la courbe C_f par rapport à son asymptote horizontale.
- 4) Etudier les variations de f .
- 5) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse -1 .

EXERCICE 3 : A faire par tous les élèves (5 points)

- 1) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
 - a) Déterminer les limites de la fonction u aux bornes de son ensemble de définition
 - b) Dresser le tableau de variations de la fonction u .
 - c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$ dont on donnera la valeur arrondie à 10^{-3} .
 - d) En déduire le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2) Soit la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

- a) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que :

$$f'(x) = \frac{u(x)}{(1+x^3)^2}$$

- b) En déduire le sens de variations de la fonction f sur $] -1 ; +\infty[$ (on ne demande pas de calculer les limites).

EXERCICE 4**Uniquement pour les élèves qui ne suivent pas la spécialité math**

(5 points)

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2018 + n)$. En 2018, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

- 1) Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = 0,95 u_n + 3.$$

- 2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 100$

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

- 3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = 60 - u_n$$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

b) Calculer v_0 . Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .

c) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$$

- 4) Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2023. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.

- 5) Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2018.

- 6) Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter.

EXERCICE 4 bis *Uniquement pour les élèves qui suivent la spécialité math. Cet exercice devra être rédigé sur une copie séparée* (5 points)

Le but de l'exercice est de démontrer l'implication :

Si M_n est un nombre de Mersenne premier alors $a = 2^{n-1} \times M_n$ est un nombre parfait pair

Définition 1 :

La suite (M_n) des nombres de Mersenne est définie pour tout entier naturel non nul par $M_n = 2^n - 1$.

Exemple : $M_7 = 2^7 - 1 = 127$. Certains de ces nombres sont premiers.

Définition 2 :

Un entier naturel n est " parfait " lorsque la somme de ses diviseurs positifs est égale à son double. Exemple : 496 a pour diviseurs positifs 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496. Si on fait la somme des diviseurs positifs on trouve 992 qui est égal à 2×496 . Donc 496 est un nombre parfait.

Partie A : Exemples

- 1) Vérifier que les nombres $a = 6$ et $a = 28$ sont parfaits.
- 2) Vérifier que ces deux nombres peuvent s'écrire sous la forme $a = 2^n \times p$ où $p = 2^{n+1} - 1$ est premier et n un entier naturel non nul.

Partie B : Cas général

Le but de cette partie est de montrer que tout nombre de la forme $a = 2^n \times p$ où $p = 2^{n+1} - 1$ est premier et n un entier naturel non nul, est un nombre parfait.

- 1) Soit **p un nombre premier** et le nombre $a = 2^n \times p$.
 - a) Citer les $2n + 2$ diviseurs positifs de a .
 - b) Montrer que leur somme en fonction de n et p s'écrit $(1 + p)(2^{n+1} - 1)$.
- 2) Supposons de plus que le nombre premier p soit de la forme $p = 2^{n+1} - 1$
 - a) Montrer que la somme des diviseurs positifs de a est égale à $2^{n+1} \times (2^{n+1} - 1)$.
 - b) En déduire que a est parfait.
 - c) Donner un nombre parfait (autre que 6, 28, 496).

Point Info :

- Ce résultat était connu d'Euclide (III^{ème} av JC).
- Deux mille ans plus tard, Leonhard Euler (1707-1883) a démontré la réciproque :

Si a est un nombre parfait pair alors a s'écrit sous la forme $a = 2^n \times p$

où **p est un nombre premier de la forme $p = 2^{n+1} - 1$** , c'est-à-dire **p est un nombre de Mersenne premier**.