|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **DEVOIR DE**  | Vendredi 16 novembre 2018 |
| Classes de Terminale 4-5-6-7 S  | **MATHEMATIQUES** | Durée : 2 heures. |
|  |  **n° 2** | *Calculatrice autorisée* |

**EXERCICE 1** ***A faire par tous les élèves*** (5 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. **Les réponses seront justifiées.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. Si pour tout réel $x>0$ :
 | $$f\left(x\right)<\frac{4}{x+1},$$ | alors | $$\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=0.$$ |
| 1. Si pour tout réel $x>0$ :
 | $$1-\frac{4}{x}\leq f\left(x\right)\leq 1+\frac{4}{x},$$ | alors | $$\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=1.$$ |
| 1. a) Si pour tout $n\in N$ :
 | $$U\_{n}=-5×\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$ | alors | $$\lim\_{n\to +\infty }U\_{n}=0.$$ |
| * 1. Si pour tout $n\in N$ :
 | $$S\_{n}=U\_{0}+U\_{1}+…+U\_{n}$$ | alors | $$\lim\_{n\to +\infty }S\_{n}=-10.$$ |

**EXERCICE 2** ***A faire par tous les élèves*** (5 points)

$f$ est une fonction définie sur $]-\infty ;1[$ par $f\left(x\right)=\frac{4x-1}{x-1}$ et $C\_{f}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $\lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)$ et $\lim\_{\begin{array}{c}x\to 1\\x<1\end{array}}f\left(x\right)$.
2. En déduire l'existence de deux asymptotes à $C\_{f}$.
3. Etudier la position de la courbe $C\_{f}$ par rapport à son asymptote horizontale.
4. Etudier les variations de $f$.
5. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $C\_{f}$ au point d'abscisse $-1$.

**EXERCICE 3** : ***A faire par tous les élèves*** (5 points)

1. Soit la fonction $u$ définie sur $R$ par : $u\left(x\right)=2x^{3}-3x^{2}-1.$
	1. Déterminer les limites de la fonction $u$ aux bornes de son ensemble de définition
	2. Dresser le tableau de variations de la fonction $u$.
	3. Montrer que l’équation $u\left(x\right)=0$ a une unique solution $α$ dans $R$ dont on donnera la valeur arrondie à $10^{-3}$.
	4. En déduire le signe de $u\left(x\right)$ suivant les valeurs de $x$.
2. Soit la fonction $f$ définie sur $\left]-1 ; +\infty \right[$ par :

$$f\left(x\right)=\frac{1-x}{1+x^{3}}.$$

* 1. Déterminer la fonction dérivée $f'$ et montrer que :

$$f^{'}\left(x\right)=\frac{u\left(x\right)}{\left(1+x^{3}\right)^{2}}$$

* 1. En déduire le sens de variations de la fonction $f$ sur $\left]-1 ; +\infty \right[$ (on ne demande pas de calculer les limites).

**EXERCICE 4** ***Uniquement pour les élèves qui ne suivent pas la spécialité math*** (5 points)

Le nombre d’arbres d’une forêt, en milliers d’unités, est modélisé par la suite $(u\_{n})$ où $u\_{n}$ désigne le nombre d’arbres, en milliers, au cours de l’année ($2018 + n$). En 2018, la forêt possède $50 000$ arbres. Afin d’entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d’entretien des forêts décide d’abattre chaque année $5 \%$ des arbres existants et de replanter $3 000$ arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par $u\_{0}=50$ et pour tout entier naturel $n $par la relation :

$$u\_{n+1}= 0,95 u\_{n} + 3.$$

1. a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u\_{n}\leq 100$
	1. Démontrer que la suite $(u\_{n})$ est croissante.
	2. Justifier que la suite $(u\_{n})$ est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
2. On considère la suite $(v\_{n})$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$v\_{n} = 60 – u\_{n} $$

* 1. Montrer que la suite $(v\_{n})$ est une suite géométrique de raison $0,95$.
	2. Calculer $v\_{0}$. Déterminer l’expression de $v\_{n}$ en fonction de $n$.
	3. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ :

$$u\_{n} = 60 – 10 × \left(0,95\right)^{n}$$

1. Déterminer le nombre d’arbres de la forêt en $2023$. On donnera une valeur approchée arrondie à l’unité.
2. Déterminer l’année à partir de laquelle le nombre d’arbres de la forêt aura dépassé de $10 \%$ le nombre d’arbres de la forêt en $2018$.
3. Déterminer la limite de la suite $(u\_{n})$. Interpréter.

 **EXERCICE 4 bis** ***Uniquement pour les élèves qui suivent la spécialité math***. ***Cet exercice devra être rédigé sur une copie séparée*** (5 points)

Le but de l'exercice est de démontrer l'implication :

***Si Mn est un nombre de Mersenne premier alors a = 2n-1×Mn est un nombre parfait pair***

**Définition 1 :**

La suite $(M\_{n})$ des nombres de Mersenne est définie pour tout entier naturel non nul par $M\_{n}=2^{n}-1$.

Exemple : $M\_{7}=2^{7}-1=127$. Certains de ces nombres sont premiers.

**Définition 2 :**

Un entier naturel $n$ est " parfait " lorsque la somme de ses diviseurs positifs est égale à son double. Exemple : $496$ a pour diviseurs positifs $1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496$. Si on fait la somme des diviseurs positifs on trouve 992 qui est égal à $2×496$. Donc $496$ est un nombre parfait.

**Partie A : *Exemples***

1. Vérifier que les nombres $a=6$ et $a=28$ sont parfaits.
2. Vérifier que ces deux nombres peuvent s’écrire sous la forme $a = 2^{n}× p$ où $p = 2^{n+1} – 1$ est premier et $n$ un entier naturel non nul.

**Partie B : *Cas général***

Le but de cette partie est de montrer que tout nombre de la forme $a = 2^{n}× p$ où $p = 2^{n+1} – 1$ est premier et $n$ un entier naturel non nul, est un nombre parfait.

1. Soit **𝑝 un nombre premier** et le nombre $a = 2^{n}× p$.
	1. Citer les $2n+2$ diviseurs positifs de *a*.
	2. Montrer que leur somme en fonction de 𝑛 et 𝑝 s'écrit $(1+p)(2^{n+1}$-1).
2. Supposons de plus que le nombre premier $p$ soit de la forme $p = 2^{n+1} - 1$
	1. Montrer que la somme des diviseurs positifs de $a $est égale à $2^{n+1}×(2^{n+1}-1)$.
	2. En déduire que 𝑎 est parfait.
	3. Donner un nombre parfait (autre que $6, 28, 496$).

Point Info :

* Ce résultat était connu d’Euclide (IIIème av JC).
* Deux mille ans plus tard, Leonhard Euler (1707-1883) a démontré la réciproque :

Si $a$ est un nombre parfait pair alors $a$ s’écrit sous la forme $a = 2^{n}× p$
où $p$ **est un nombre premier de la forme** $p = 2^{n+1} – 1$, c’est-à-dire $p$ **est un nombre de Mersenne premier**.