|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **DEVOIR DE** | Vendredi 16 novembre 2018 |
| Classes de Terminale 4-5-6-7 S | **MATHEMATIQUES** | Durée : 2 heures. |
|  | **n° 2** | *Calculatrice autorisée* |

**EXERCICE 1** ***A faire par tous les élèves*** (5 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. **Les réponses seront justifiées.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. Si pour tout réel  : |  | alors |  |
| 1. Si pour tout réel  : |  | alors |  |
| 1. a) Si pour tout  : |  | alors |  |
| * 1. Si pour tout  : |  | alors |  |

**EXERCICE 2** ***A faire par tous les élèves*** (5 points)

est une fonction définie sur par et sa courbe représentative.

1. Calculer et .
2. En déduire l'existence de deux asymptotes à .
3. Etudier la position de la courbe par rapport à son asymptote horizontale.
4. Etudier les variations de .
5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse .

**EXERCICE 3** : ***A faire par tous les élèves*** (5 points)

1. Soit la fonction définie sur par :
   1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition
   2. Dresser le tableau de variations de la fonction .
   3. Montrer que l’équation a une unique solution dans dont on donnera la valeur arrondie à .
   4. En déduire le signe de suivant les valeurs de .
2. Soit la fonction définie sur par :
   1. Déterminer la fonction dérivée et montrer que :
   2. En déduire le sens de variations de la fonction sur (on ne demande pas de calculer les limites).

**EXERCICE 4** ***Uniquement pour les élèves qui ne suivent pas la spécialité math*** (5 points)

Le nombre d’arbres d’une forêt, en milliers d’unités, est modélisé par la suite où désigne le nombre d’arbres, en milliers, au cours de l’année (). En 2018, la forêt possède arbres. Afin d’entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d’entretien des forêts décide d’abattre chaque année des arbres existants et de replanter arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par et pour tout entier naturel par la relation :
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel ,
   1. Démontrer que la suite est croissante.
   2. Justifier que la suite est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
3. On considère la suite définie pour tout entier naturel par :
   1. Montrer que la suite est une suite géométrique de raison .
   2. Calculer . Déterminer l’expression de en fonction de .
   3. Démontrer que pour tout entier naturel :
4. Déterminer le nombre d’arbres de la forêt en . On donnera une valeur approchée arrondie à l’unité.
5. Déterminer l’année à partir de laquelle le nombre d’arbres de la forêt aura dépassé de le nombre d’arbres de la forêt en .
6. Déterminer la limite de la suite . Interpréter.

**EXERCICE 4 bis** ***Uniquement pour les élèves qui suivent la spécialité math***. ***Cet exercice devra être rédigé sur une copie séparée*** (5 points)

Le but de l'exercice est de démontrer l'implication :

***Si Mn est un nombre de Mersenne premier alors a = 2n-1×Mn est un nombre parfait pair***

**Définition 1 :**

La suite des nombres de Mersenne est définie pour tout entier naturel non nul par .

Exemple : . Certains de ces nombres sont premiers.

**Définition 2 :**

Un entier naturel est " parfait " lorsque la somme de ses diviseurs positifs est égale à son double. Exemple : a pour diviseurs positifs . Si on fait la somme des diviseurs positifs on trouve 992 qui est égal à . Donc est un nombre parfait.

**Partie A : *Exemples***

1. Vérifier que les nombres et sont parfaits.
2. Vérifier que ces deux nombres peuvent s’écrire sous la forme où est premier et un entier naturel non nul.

**Partie B : *Cas général***

Le but de cette partie est de montrer que tout nombre de la forme où est premier et un entier naturel non nul, est un nombre parfait.

1. Soit **𝑝 un nombre premier** et le nombre .
   1. Citer les diviseurs positifs de *a*.
   2. Montrer que leur somme en fonction de 𝑛 et 𝑝 s'écrit -1).
2. Supposons de plus que le nombre premier soit de la forme
   1. Montrer que la somme des diviseurs positifs de est égale à .
   2. En déduire que 𝑎 est parfait.
   3. Donner un nombre parfait (autre que ).

Point Info :

* Ce résultat était connu d’Euclide (IIIème av JC).
* Deux mille ans plus tard, Leonhard Euler (1707-1883) a démontré la réciproque :

Si est un nombre parfait pair alors s’écrit sous la forme   
où  **est un nombre premier de la forme** , c’est-à-dire  **est un nombre de Mersenne premier**.