

Exercice 1

1)

n	u_n
0	2
1	$2(2)^2 + 2 = 10$
2	$2(10)^2 + 10 = 210$

La réponse B est correctePour étudier le sens de variations, étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = 2(u_n)^2 + u_n - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = 2(u_n)^2$$

$$(u_n)^2 \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ donc } u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La réponse D est correcte

2) $u_{p-1} = -3(p-1) + 2$

$$u_{p-1} = -3p + 5$$

$$u_{p+1} = -3(p+1) + 2$$

$$u_{p+1} = -3p - 1$$

Donc $u_{p+1} - u_p = -3p - 1 - (-3p + 2)$

$$u_{p+1} - u_p = -3p - 1 + 3p - 2$$

$$u_{p+1} - u_p = -3$$

et $u_p - u_{p-1} = -3p + 2 - (-3p + 5)$

$$u_p - u_{p-1} = -3p + 2 + 3p - 5$$

$$u_p - u_{p-1} = -3$$

La réponse B est correcteLa suite (u_n) est définie par une fonction de n .

$$u_n = f(n) \text{ avec } f(x) = -3x + 2$$

 f est une fonction affine décroissante.Donc la suite (u_n) est décroissante.La réponse C est correcte

3) $u_n = -2 \times \frac{1}{3^n}$

$$u_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_n = u_0 \times q^n \text{ avec } u_0 = -2 \text{ et } q = \frac{1}{3}$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.La réponse C est correcte.

Exercice 2

1) Augmenter de $t\%$, c'est multiplier par $1 + \frac{t}{100}$

Diminuer de $t\%$, c'est multiplier par $1 - \frac{t}{100}$

Diminuer de 20% , c'est multiplier par $0,8$

De plus, chaque année le nombre d'abeilles augmente de 5 millions par achat de 5000 nouvelles abeilles

$$\text{Donc } u_{n+1} = 0,8 u_n + 5$$

2) $u_0 = 10$ puisqu'au départ il y a 10000 abeilles

n	u_n
0	10
1	$0,8(10) + 5 = 13$
2	$0,8(13) + 5 = 15,4$
3	$0,8(15,4) + 5 = 17,32$

3) $u_0 = 10$
 $u_1 = 13$
 $u_2 = 15,4$

$$u_1 - u_0 = 3$$

$$u_2 - u_1 = 2,4$$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{13}{10}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{15,4}{13}$$

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite n'est pas géométrique

4) $v_{n+1} = u_{n+1} - 25$
 $v_{n+1} = 0,8 u_n + 5 - 25$
 $v_{n+1} = 0,8 u_n - 20$
 $v_{n+1} = 0,8 (u_n - 25)$

Or $v_n = u_n - 25$

Donc $v_{n+1} = 0,8 v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Conclusion: la suite (v_n) est géométrique de 1^{er} terme $v_0 = u_0 - 25 = -15$
 de raison $q = 0,8$

5) La suite (v_n) est géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n$ $\frac{v_n}{v_0} = -15 \times 0,8^n$
 De plus $u_n = v_n + 25$ donc $u_n = -15 \times 0,8^n + 25$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

6) En faisant la table des valeurs de (u_n) à la calculatrice, on voit que la première valeur de n telle que $u_n \geq 26$ est $n = 13$.
 L'objectif de l'apiculteur est atteint au bout de 13 ans.

Exercice 3

1) a) la suite des entiers de 1 à n est une suite arithmétique
de premier terme 1
de raison 1

$$b) S_n = \frac{(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}}{2}$$

$$S_n = \frac{(1+n)n}{2}$$

2) • Initialisation pour $n=1$

$$S'_1 = 1^3 = 1$$

$$\text{et } \frac{(1)^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$$

$$\text{donc } S'_1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \text{ est vrai}$$

• Hérité. On suppose que pour un certain entier k naturel non nul, on a :

$$S'_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad (\text{c'est l'hypothèse de récurrence})$$

$$\text{Montrons qu'alors } S'_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$S'_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$$

$$S'_{k+1} = S'_k + (k+1)^3$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$S'_{k+1} = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$S'_{k+1} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$S'_{k+1} = \frac{(k+1)^2 [k^2 + 4(k+1)]}{4}$$

$$S'_{k+1} = \frac{(k+1)^2 (k^2 + 4k + 4)}{4}$$

$$S'_{k+1} = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

la propriété est héréditaire.

• Conclusion : la propriété $S'_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$

$$3) S'_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$S'_n = (S'_n)^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

La somme des cubes est égale au carré de la somme des nombres.

Exercice 4

A) 1) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 2 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Si l'utilisateur entre 3, l'algorithme affiche

$$\begin{aligned} u_0 &= 5 \\ u_1 &= -3 \\ u_2 &= 5 \\ u_3 &= -3 \end{aligned}$$

3) Lire N
 $u \leftarrow 5$
 Pour I allant de 1 à N
 $u \leftarrow -u + 2$
 Fin Pour
 Afficher u

B) Considérons que le château est constitué de 4 étages, le 1^{er} étant le plus haut.

Sur la figure de l'énoncé:

1^{er} étage complet: 3 cartes (formant un triangle équilatéral)
 2^e étage complet: 2 triangles équilatéraux
 3^e étage complet: 3 triangles équilatéraux
 4^e étage incomplet: 4 triangles équilatéraux moins le 4 cartes du sol.

Soit au total $(1+2+3+4)$ triangles équilatéraux = 4

On en déduit que pour un château à n étages ($n \in \mathbb{N}^*$) il y a

$$u_n = (1+2+3+\dots+n) \times 3 - n \text{ cartes}$$

$$u_n = \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

$$u_n = \frac{3n(n+1) - 2n}{2}$$

$$u_n = \frac{3n^2 + 3n - 2n}{2}$$

$$u_n = \frac{3n^2 + n}{2} \text{ cartes}$$

Exemple: sur la figure de l'énoncé, il y a $u = \frac{3 \times 16 + 1}{2} = 26$ cartes.

Nombre d'étages du plus grand château de cartes complet 2

On cherche le plus grand entier (qu'on notera M_0) qui vérifie

$$\frac{3n^2 + n}{2} \leq 540$$

$$3n^2 + n \leq 1080$$

$$3n^2 + n - 1080 \leq 0$$

Le polynôme du 2^e degré a deux racines $n_1 \approx -19,14$ et $n_2 \approx 18,81$

n	$-\infty$	n_1	n_2	$+\infty$
signe de $3n^2 + n - 1080$	+	-	+	+

D'après le tableau de signes le plus grand entier M_0 tel que $3n^2 + n - 1080 \leq 0$ est $M_0 = 18$

Exercice 4 bis

1) a) $A=8$ divise $f(m) = 2m+4 \Leftrightarrow$ Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que
 $8k = 2m+4$
 $4k = m+2$
 $4k-2 = m$

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} = \{4k-2 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}\}$$

b) Les diviseurs de 4 sont $-4, -2, -1, 1, 2, 4$
 Calculons les valeurs de m pour que $2m+6$ divise 4

$2m+6$	$2m$	m
$2m+6 = -4$	-10	-5
$2m+6 = -2$	-8	-4
$2m+6 = -1$	-7	-3,5
$2m+6 = 1$	-5	-2,5
$2m+6 = 2$	-4	-2
$2m+6 = 4$	-2	-1

Puisque $m \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P} = \{-5, -4, -2, -1\}$

c) Si $3m+6$ divise $m+5$
 et $3m+6$ divise $3m+6$
 donc

$3m+6$ divise $-3(m+5) + 3m+6$
 $3m+6$ divise $-3m-15+3m+6$
 $3m+6$ divise -9

On l'ensemble des diviseurs de -9 est $D(-9) = \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\}$

$3m+6$	$3m$	m
$3m+6 = -9$	-15	-5
$3m+6 = -3$	-9	-3
$3m+6 = -1$	-7	-7/3
$3m+6 = 1$	-5	-5/3
$3m+6 = 3$	-3	-1
$3m+6 = 9$	3	1

Les valeurs a priori possibles pour m sont $-5, -3, -1, 1$
 Mais il faut examiner la réciproque

Si $m =$	$f(m)$	$g(m)$	$f(m)$ divise $g(m)$
-5	-9	0	oui
-3	-3	2	non
-1	3	4	non
1	9	6	non

D'où $\mathcal{P} = \{-5\}$

2) Proposition 1 : $\mathcal{P} = m + (m+1) + (m+2) + (m+3) + (m+4)$
 VRAIE

$$\mathcal{P} = 5m+10$$

$$\mathcal{P} = 5(m+2)$$

$m+2 \in \mathbb{Z}$ donc $\mathcal{P}$ est toujours un multiple de 5.

Proposition 2 :
 FAUSSE

$2 \times 3^{201} + 6 = 3(2 \times 3^{201} + 2)$
 $(2 \times 3^{201} + 2)$ est un entier donc 3
 est un diviseur de $2 \times 3^{201} + 6$. Donc il n'est pas premier avec 3. (5)