CHAPITRE 7 : Fonction logarithme népérien

[1 Définition de la fonction logarithme népérien 2](#_Toc460273265)

[2 Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien 3](#_Toc460273266)

[3 Résolution d’équations et d’inéquations 4](#_Toc460273267)

[3.1 Equations 4](#_Toc460273268)

[3.2 Inéquations 4](#_Toc460273269)

[4 Etude de la fonction logarithme népérien 5](#_Toc460273270)

[4.1 Continuité et dérivabilité 5](#_Toc460273271)

[4.2 Variations 5](#_Toc460273272)

[4.3 Limites en 0 et en 5](#_Toc460273273)

[4.4 Tableau de variation et représentation graphique 6](#_Toc460273274)

[4.5 Autre limite à connaitre 7](#_Toc460273275)

[4.6 Autres limites limite de ln(x) sur x.jpg et limite de x. ln(x).jpg 7](#_Toc460273276)

[5 Fonction 8](#_Toc460273277)

[6 Fonction logarithme décimal 8](#_Toc460273278)

[6.1 Définition 8](#_Toc460273279)

[6.2 Propriétés 8](#_Toc460273280)

CHAPITRE 7 : Fonction logarithme népérien

# Définition de la fonction logarithme népérien[[1]](#footnote-1)

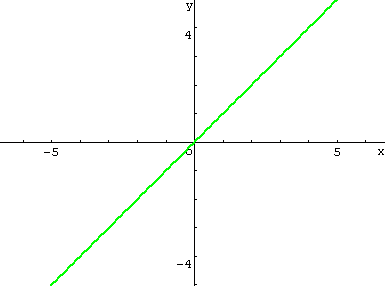
La fonction logarithme népérien, notée , est la fonction définie sur qui, à tout réel strictement positif, associe le réel tel que .

On dit que les fonctions  **et sont des fonctions réciproques** l’une de l’autre.

***Remarques sur le langage :***

On dit que la fonction est une bijection de dans .

est elle-même une bijection de dans . C’est la bijection réciproque de

***Conséquences*** :

1. ,
2. ,
3. ,
4. et

***Remarque :*** Leurs courbes représentatives,   
dans un repère orthonormé, sont symétriques   
par rapport à la première bissectrice.

# Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Pour tous réels et strictement positifs,

1. Pour tout ,

***Démonstrations :***

1. Notons Alors

Notons Alors

donc **.**

1. D’après la propriété (1) .

Et comme

on déduit que . D’où

1. .

D’après les propriétés (1) et (2) D’où

1. Pour , faisons une démonstration par récurrence :

* Initialisation : si  on a : et .  
  Donc
* Hérédité : Supposons qu’au rang  : (hypothèse de récurence)

. D’après la propriété (1) on a .

Donc en utilisant l’hypothèse de récurrence, .

D’où

* Conclusion : **Pour tout ,**

On admet finalement, **pour tout ,**

1. pour tout réel , donc

De plus, . Donc . D’où

# Résolution d’équations et d’inéquations

## Equations

pour tous réels et strictement positifs

***Démonstration :***

On sait que pour tous réels et , . Donc :

équivaut successivement à :

***Exemple :***

Résoudre dans l’équation

* Condition d’existence :
* Pour tout réel , équivaut successivement à :

d’où l’ensemble des solutions

## Inéquations

pour tous réels et strictement positifs

***Démonstration :***

On sait que pour tous réels et , . Donc :

équivaut successivement à :

***Exemple :***

Résoudre dans l’inéquation

* Condition d’existence :
* Pour tout réel , équivaut successivement à :

d’où l’ensemble des solutions

# Etude de la fonction logarithme népérien

## Continuité et dérivabilité

* La fonction est **continue** sur
* La fonction est **dérivable** sur et pour tout réel de :

## Variations

La fonction est strictement croissante sur .

***Démonstration :***

Pour tout , donc

Conclusion : la fonction est strictement croissante sur .

## Limites en 0 et en

et

|  |  |
| --- | --- |
| ***Démonstration de :*** |  |

Soit *A* un réel positif.

Donc pour *x* assez grand (*x* > ) , l’intervalle ] *A* ; +[ contient toutes les valeurs de .

Ainsi .

|  |  |
| --- | --- |
| ***Démonstration de :*** |  |

Soit un réel . Faisons un changement de variable. On pose .

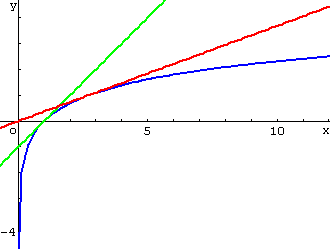
donc =

D’après le résultat précédemment démontré d’où

Conclusion :

La courbe représentative de la fonction admet l’axe des ordonnées comme asymptote verticale.

## Tableau de variation et représentation graphique

****

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
| variation de |  |

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien et ses tangentes et

La tangente à la courbe d’équation au point d’abscisse 1 est la droite d’équation 

***Démonstration***

La tangente au point d’abscisse 1 a pour équation

Or , donc la tangente a pour équation

La tangente à la courbe au point d’abscisse est la droite d’équation :

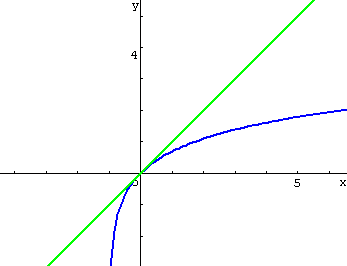
***Démonstration***

La tangente au point d’abscisse a pour équation

Or , donc la tangente a pour équation Elle passe donc par l’origine du repère.

## Autre limite à connaitre

limite ln(1+x) sur x.jpg

Calcul de :

Pour tout réel non nul

Or, la fonction est dérivable en et , donc :

## Autres limites limite de ln(x) sur x.jpg et limite de x. ln(x).jpg

***Démonstration :***

On fait le changement de variable Ainsi :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Or, on sait que |  | D’où, par passage à l’inverse : |  |

***Démonstration :*** On fait un changement de variable Ainsi :

D’après le résultat précédemment démontré : d’où

# Fonction

Soit une fonction **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle .

|  |  |
| --- | --- |
| La fonction est **dérivable sur**  et |  |

# Fonction logarithme décimal

## Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction notée , définie sur par :

***Remarques :***

et .

La fonction a le même signe, le même sens de variation et les mêmes limites que la fonction

## Propriétés

Pour tous réels et de

***Démonstration :***

***Conséquences :***

Les propriétés algébriques de la fonction sont aussi vérifiées par la fonction . Ainsi, pour tous réels et strictement positifs :

1. Pour tout , . En particulier, .

1. **Neper** (John), *baron* **de Merchiston,** mathématicien écossais (Merchiston, près d'Édimbourg, 1550 - 1617). On lui doit l'invention des logarithmes (1614). [↑](#footnote-ref-1)