CHAPITRE 6 : Géométrie dans l’espace

[1 Positions relatives de droites et de plans de l’espace 3](#_Toc460272250)

[1.1 Définitions 3](#_Toc460272251)

[1.1.a Droites de l’espace 3](#_Toc460272252)

[1.1.b Droites et plans de l’espace 3](#_Toc460272253)

[1.1.c Plans de l’espace 4](#_Toc460272254)

[1.2 Déterminer l’intersection de deux plans 4](#_Toc460272255)

[2 Parallélisme dans l’espace 4](#_Toc460272256)

[2.1 Parallélisme d’une droite avec un plan 4](#_Toc460272257)

[2.2 Parallélisme de deux droites 4](#_Toc460272258)

[2.3 Parallélisme de deux plans 5](#_Toc460272259)

[3 Orthogonalité dans l’espace 6](#_Toc460272260)

[3.1 Orthogonalité de deux droites de l’espace 6](#_Toc460272261)

[3.2 Orthogonalité d’une droite et d’un plan 6](#_Toc460272262)

[3.3 Plan médiateur d’un segment 7](#_Toc460272263)

[4 Géométrie vectorielle 7](#_Toc460272264)

[4.1 Notion de vecteur de l’espace 7](#_Toc460272265)

[4.1.a Définitions et règles de calculs 7](#_Toc460272266)

[4.1.b Vecteurs colinéaires, parallélisme et alignement 7](#_Toc460272267)

[4.2 Vecteurs coplanaires 8](#_Toc460272268)

[4.2.a Caractérisation vectorielle d’un plan de l’espace 8](#_Toc460272269)

[4.2.b Vecteurs coplanaires 8](#_Toc460272270)

[4.2.c Vecteurs non coplanaires 9](#_Toc460272271)

[4.2.d Application : une autre démonstration du théorème du toit 10](#_Toc460272272)

[4.3 Repérage dans l’espace 11](#_Toc460272273)

[4.3.a Repère de l’espace (orthogonaux ou quelconques) 11](#_Toc460272274)

[4.3.b Coordonnées d’un point. Coordonnées d’un vecteur. 11](#_Toc460272275)

[4.3.c Décomposition d’un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires 12](#_Toc460272276)

[4.3.d Calculs sur les coordonnées (propriétés admises) 12](#_Toc460272277)

[4.4 Systèmes d’équations paramétriques 12](#_Toc460272278)

[4.4.a Représentation paramétrique d’une droite de l’espace 12](#_Toc460272279)

[4.4.b Représentation paramétrique d’un plan de l’espace 13](#_Toc460272280)

[5 Produit scalaire 13](#_Toc460272281)

[5.1 Projections orthogonales 13](#_Toc460272282)

[5.1.a Projection orthogonale sur un plan 13](#_Toc460272283)

[5.1.b Projection orthogonale sur une droite 14](#_Toc460272284)

[5.2 Produit scalaire dans l’espace 14](#_Toc460272285)

[5.2.a Définition 14](#_Toc460272286)

[5.2.b Expression analytique 15](#_Toc460272287)

[5.2.c Propriétés (admises, sauf la dernière) 15](#_Toc460272288)

[5.3 Orthogonalité dans l’espace 16](#_Toc460272289)

[5.3.a Vecteurs orthogonaux 16](#_Toc460272290)

[5.3.b Orthogonalité de deux droites 16](#_Toc460272291)

[5.3.c Vecteur normal à un plan 16](#_Toc460272292)

[5.3.d Plans perpendiculaires 17](#_Toc460272293)

[5.4 Application du produit scalaire : équation cartésienne d’un plan 17](#_Toc460272294)

[5.5 Intersection de droites et de plans 18](#_Toc460272295)

[5.5.a Intersection d’une droite et d’un plan 18](#_Toc460272296)

[5.5.b Intersection de deux plans 18](#_Toc460272297)

CHAPITRE 6 : Géométrie dans l’espace

# Positions relatives de droites et de plans de l’espace

## Définitions

### Droites de l’espace

Deux droites de l’espace sont :

|  |  |
| --- | --- |
| • soit **coplanaires** | • soit **non coplanaires** |
| *d1* et *d2* sont sécantes en un point d’intersection *A*.On note : *d1 d2* =  | *d1* et *d2* sont strictement *d1* et *d2* sont parallèles. confondues.On note : *d1 d2  d1 d2* | Aucun plan ne contient *d1* et *d2*. |

### Droites et plans de l’espace

Une droite et un plan de l’espace sont :

|  |  |
| --- | --- |
| • soit **sécants** | • soit **parallèles** |
| *d* et *P* ont un point d’intersection *A*.On note : *d* *P* =  | *d* est contenue dans .On note : *d*  | *d* et sont strictement parallèles.On note : *d*  |

### Plans de l’espace

Deux plans sont :

|  |  |
| --- | --- |
| • soit **sécants** | • soit **parallèles** |
| P1 et P2 ont une droite d’intersection d.On note : P1 P2 =  | P1 et P2 sont strictement parallèles.On note : P1 P2 | P1 et P2 sont confondus.On note : P1 P2 |

## Déterminer l’intersection de deux plans

**Méthode :**Pour trouver l’intersection de deux plans sécants et *’*, **il suffit** de trouver deux points et distincts, communs aux deux plans et *’*. L’intersection des plans et est la droite

# Parallélisme dans l’espace

## Parallélisme d’une droite avec un plan

**Théorème 1 :** Si une droite est parallèle à une droite ’ d’un plan , alors est parallèle à .

## Parallélisme de deux droites

**Théorème 2:**

Si et *’* sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe coupe aussi *’* et les droites d’intersection sont parallèles.

**Théorème 3 (« Théorème du toit » :** et ’ sont deux droites parallèles. est un plan contenant , et ’ un plan contenant ’. Si, en outre, les plans et ’ sont sécants, alors la droite Δ d’intersection de ces plans est parallèle à et à ’.

 (P)

 P’)

 ‘(d’)

Δ

.

**Corollaire :** Si une droite est parallèle à deux plans sécants et *’*, alors est parallèle à la droite d’intersection de et *’*.

 (P)

 P’)

Δ

## Parallélisme de deux plans

**Théorème 3 :** Si un plan contient deux droites et ’ sécantes et si ces droites sont toutes les deux parallèles à un plan ’, alors les plans et ’ sont parallèles.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

# Orthogonalité dans l’espace[[1]](#footnote-1)

## Orthogonalité de deux droites de l’espace

Δ

Δ’

**Définition :** On dit que deux droites et sont **orthogonales**

s’il existe une droite Δ parallèle à et une droite Δ’ parallèle à ’

qui sont perpendiculaires dans le plan qu’elles déterminent.

**Notation :** Lorsqu’une droite est orthogonale à une droite

ou un plan , on note ou .

**Propriété :** Si deux droites sont parallèles, toute droite orthogonale à l’une est orthogonale à l’autre.

## Orthogonalité d’une droite et d’un plan

**Définition :** Une droite est **perpendiculaire** à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan

**Théorème 1:** Si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

*(démonstration : activité 2 p. 232*)

**Propriétés (admises) :**

1. Il existe une unique droite passant par un point et perpendiculaire à un plan donné.
2. Il existe un unique plan passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée.
3. Si deux droites et sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à est perpendiculaire à .
4. Si deux droites et sont perpendiculaires à un même plan , alors elles sont parallèles.
5. Si deux plans et ’ sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à est perpendiculaire à .

**Théorème 2:** Pour qu’une droite et un plan soient perpendiculaires, il suffit que soit orthogonale à deux droites sécantes de .

## Plan médiateur d’un segment

**Définition :**

Le plan médiateur d’un segment est le plan passant par le milieu du segment et perpendiculaire à la droite

𝐼

**Propriété (admise) :**

Le plan médiateur de est l’ensemble des points équidistants de et .

# Géométrie vectorielle

## Notion de vecteur de l’espace

### Définitions et règles de calculs

La notion de vecteur, vue en géométrie plane, se généralise à l’espace.

Par analogie, avec la définition dans le plan, on associe à deux points distincts et de l’espace, le vecteur caractérisé par sa direction (celle de la droite ) , son sens (celui de vers et sa longueur (ou norme : la distance , on note : ).

Le vecteur nul, noté, est tel que : …

Deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu’ils ont même direction, même sens et même longueur.

**Théorème admis :**  , et sont quatre points de l’espace.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1.
2. Le quadrilatère est un parallélogramme
3. Les segments et ont le même milieu

Les règles de calculs, y compris la relation de Chasles, sont les mêmes qu’avec les vecteurs du plan.

### Vecteurs colinéaires, parallélisme et alignement

**Définition :** Deux vecteurs et sont colinéaires si et seulement s’il existe un réel tel que ou . (Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur).

**Théorèmes:**

1. Les points , sont alignés si et seulement si les vecteurs et sont colinéaires.
2. Les droites et sont parallèles si et seulement si et sont colinéaires.

**Théorèmes:** et sont deux points distincts de l’espace. La droite est l’ensemble des points tels que et sont colinéaires, c’est-à-dire l’ensemble des points tels que , étant un réel quelconque.

 et sont deux points distincts de l’espace. Le segment est l’ensemble des points tels que , avec un réel de l’intervalle .

## Vecteurs coplanaires

### Caractérisation vectorielle d’un plan de l’espace

**Théorème 1 :** soient , trois points non alignés.

Le plan est l’ensemble des points tels qu’il existe des réels et vérifiant :

**Illustration :**

x

M

y

C

B

A

* Soient , trois points non alignés. Les vecteurs et ne sont pas colinéaires donc est un repère du plan Donc si est dans ce plan, il existe un couple tel que .
* **Réciproquement**, nous allons prouver que tout point de l’espace tel que est un point du plan Puisque est un repère du plan , il existe dans ce plan un point de coordonnées tel que d’où : et . est donc bien dans le plan

**Définition :** On dit que les vecteurs et sont **des vecteurs directeurs** du plan

Un plan est déterminé par un point et deux vecteurs et non colinéaires. On note .

### Vecteurs coplanaires

**Définition :** Dire que les vecteurs et sont coplanaires signifie que si on choisit un point quelconque, et les points tels que et sont dans un même plan.

**Remarques :**

* Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
* Si deux vecteurs et sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur , les vecteurs et sont coplanaires.

**Théorème 2 :** et sont trois vecteurs tels que et ne sont pas colinéaires. Dire que les vecteurs et sont coplanaires équivaut à dire qu’il existe deux réels et et tels que l’on peut écrire : .

**Démonstration :** Puisque et ne sont pas colinéaires, ils sont des vecteurs directeurs du plan . Par définition, «  et sont coplanaires » signifie que appartient au plan .
D’après le théorème précédent, cette appartenance équivaut à « il existe deux réels et et tels que  » soit : .

**Conséquences  :**

* Dire que quatre points sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs et sont coplanaires.
* Dire que les droites et sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs et sont coplanaires.
* Dire que deux plans sont parallèles équivaut à dire que deux vecteurs non colinéaires de l’un et deux vecteurs non colinéaires de l’autre sont coplanaires.
* Dire qu’une droite est parallèle à un plan équivaut à dire que un vecteur directeur de est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires de .

**Corollaire :** Trois vecteurs et sont coplanaires lorsque :

Il existe trois réels et non tous nuls tels que :.

### Vecteurs non coplanaires

Trois vecteurs et ne sont pas coplanaires lorsque :

L’égalité implique : .

***Exemple :***

Les vecteurs , , sont-ils coplanaires ?

*Réponse :*

équivaut successivement à :

Conclusion :

ce qui équivaut à : les trois vecteurs ne sont pas coplanaires[[2]](#footnote-2).

### Application : une autre démonstration du théorème du toit

**Enoncé :**

Lorsque deux plans sécants passent par deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces deux droites.

 (P)

 P’)

 ‘(d’)

Δ

**Démonstration :**

Notons un vecteur directeur de et

Notons un vecteur directeur de Δ.

Notons un couple de vecteurs directeurs de
Notons un couple de vecteurs directeurs de.

La droite Δ est contenue dans donc les vecteurs sont coplanaires.
Donc il existe un couple de réels tel que (1).

De même Δ est contenue dans donc les vecteurs sont coplanaires.
Donc il existe un couple de réels tel que (2).

Les membres de droite des relations (1) et (2) sont égaux :

Par hypothèse, et **sont sécants** donc les vecteurs ,  **et ne sont pas coplanaires**.

Donc les relations (1) et (2) s’écrivent .

Conclusion : Δ est parallèle à et

## Repérage dans l’espace

### Repère de l’espace (orthogonaux ou quelconques)

**Définitions :**

Soient , et trois vecteurs non coplanaires de l’espace et un point de l’espace. Alors

* est une base des vecteurs de l’espace.
* est un repère de l’espace.
* Si , et , le repère est dit orthonormé lorsque les droites et sont deux à deux perpendiculaires et

### Coordonnées d’un point. Coordonnées d’un vecteur.

**Théorème :** est un repère de l’espace.

*z*

Pour tout point de l’espace, il existe un unique triplet de nombres tel que .

**Démonstration :**

*O*

1. Démontrons l’existence du triplet .

*x*

*y*

, et étant non coplanaires, le plan et la droite ne sont pas parallèles. Notons le point d’intersection du plan et de la droite

 est un point du plan ; il existe donc deux nombres et tels que . Les vecteurs et sont colinéaires, il existe donc tel que .

Or, d’après la relation de Chasles, donc .

1. Démontrons l’unicité du triplet

Si , alors Ce qui conduit, puisque , et ne sont pas coplanaires à et .

**Définitions :**

* sont les coordonnées de dans le repère .

 est l’abscisse, est l’ordonnée et est la cote de dans ce repère.

* est un repère de l’espace. Au vecteur associons tel que . Par définition, les coordonnées de sont les coordonnées de Ainsi, tout vecteur s’écrit de manière unique : .

### Décomposition d’un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires

**Théorème :** et sont trois vecteurs non coplanaires. Pour tout vecteur , il existe un triplet unique de nombres tel que

**Définition :** sont les coordonnées de dans la base .

### Calculs sur les coordonnées (propriétés admises)

* Dans un repère :
	+ si ont pour coordonnées et , alors :
		- équivaut à et
		- pour tout réel , a pour coordonnées ;
		- le vecteur a pour coordonnées .
	+ si et ont pour coordonnées et , alors
		- le vecteur a pour coordonnées ;
		- le milieu du segment a pour coordonnées .
* Dans un repère orthonormé :
	+ ;
	+ .

## Systèmes d’équations paramétriques

### Représentation paramétrique d’une droite de l’espace

L’espace est muni d’un repère orthonormé .

Soit une droite de l’espace passant par le point et de vecteur directeur .

Un point de coordonnées appartient à équivaut successivement à :

*  et sont colinéaires
* Il existe un réel tel que
* Il existe un réel tel que
* Il existe un réel tel que (S)

Ce système (S) est une **représentation paramétrique** de la droite , est le paramètre du point .

**Exemple :** La droite de vecteur directeur , passant par le point admet comme système d’équations paramétriques : avec .

 correspond au point ou

### Représentation paramétrique d’un plan de l’espace

L’espace est muni d’un repère orthonormé .

Soit un plan de l’espace passant par le point et de vecteurs directeurs et .

Un point de coordonnées appartient à équivaut successivement à :

* Il existe deux réels et tels que
* Il existe deux réels et tels que
* Il existe deux réels et tels que (S)

Ce système (S) est une **représentation paramétrique** du plan ,le couple est le couple de paramètres du point .

# chap6 21a.jpgProduit scalaire

## Projections orthogonales

### Projection orthogonale sur un plan

 est un plan , est un point de l’espace.

La droite passant par et perpendiculaire à coupe en .

 est le projeté orthogonal de sur .



### Projection orthogonale sur une droite

 est une droite, est un point de l’espace.

Le plan passant par et perpendiculaire à coupe en .

 est le projeté orthogonal de sur .

## Produit scalaire dans l’espace

### Définition

Soit et deux vecteurs de l’espace.

Soit , et sont trois points de l’espace tels que et .

Il existe au moins un plan contenant les points , et (unique si , et ne sont pas alignés).

est le produit scalaire calculé dans le plan .

**Remarque** :

 donc

**Exemple :**

###  Expression analytique

Dans un repère orthonormé si et , alors :

**Démonstration :**

Soit et dans un repère orthonormé de l’espace

### Propriétés (admises, sauf la dernière)

* Les propriétés mettant en jeu 2 vecteurs dans le plan sont encore vraies dans l’espace.
	+ En particulier, si et sont deux vecteurs non nuls tels que : et . Alors :

 , avec le projeté orthogonal de sur la droite

* Pour tous vecteurs , et et pour tout réel :

**Démonstration :**

Soit , et dans un repère orthonormé de l’espace

On a

## Orthogonalité dans l’espace

### Vecteurs orthogonaux

**Définition** : Dire que deux vecteurs et non nuls de l’espace sont orthogonaux signifie que si et , alors les droites et sont orthogonales.

Le vecteur nul est, par convention, orthogonal à tous les vecteurs de l’espace.

**Théorème :** Deux vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si .

**Démonstration :** Si ou alors d’après la définition.

Si et ne sont pas nuls, considérons les points et tels que et . Les vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si les droites et sont orthogonales ce qui équivaut à donc à et à

### Orthogonalité de deux droites

**Propriété (admise)** : Si et sont deux vecteurs directeurs respectifs des droites et , alors ces droites sont orthogonales si et seulement si : .

### Vecteur normal à un plan

**Définition :** Un vecteur non nul est normal à un plan lorsque toute droite de vecteur directeur est perpendiculaire à .

**Remarque :** Tous les vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires entre eux.

**Propriété (admise) :** est un plan , est un point de et est un vecteur normal à . Le plan est l’ensemble des points de l’espace tels que.

**Théorème :** Soit une droite passant par et de vecteur directeur .

La droite et le plan sont perpendiculaires si et seulement si est orthogonale à deux droites sécantes et de

**Démonstration (exigible au baccalauréat) :** Si la droite et le plan sont perpendiculaires, alors est orthogonale à toute droite du plan  ; elle est en particulier orthogonale aux droites et

***Réciproquement***, supposons que est orthogonale à deux droites sécantes et de .

* Si , et sont des vecteurs directeurs, respectivement des droites , et , et puisque est orthogonale à et
* Soit une droite du plan et un vecteur directeur de
* Les droites et étant sécantes, les vecteurs et ne sont pas colinéaires et constituent une base du plan , il existe donc deux réels et tels que .
* On a alors .
* On en déduit donc que les vecteurs et sont orthogonaux, donc que la droite est orthogonale à la droite

**Remarque :** Un vecteur est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs et non colinéaires de ce plan.



### Plans perpendiculaires

 et sont des plans, et des vecteurs normaux respectivement à et .

**Définition :**  et sont dits perpendiculaires si l’un des deux plans contient une droite perpendiculaire à l’autre plan.

**Propriété :** et sont perpendiculaires équivaut à et sont orthogonaux.

**Remarque :** Lorsque deux plans sont perpendiculaires, toute droite de l’un n’est pas perpendiculaire à l’autre et toute droite de l’un n’est pas perpendiculaire à toute droite de l’autre

## Application du produit scalaire : équation cartésienne d’un plan

Dans un repère orthonormé  de l’espace

1. Soit un réel. Un plan de vecteur normal a une équation de la forme :
2. **Réciproquement**, , , et étant 4 réels donnés avec, l’ensemble des points tels que est un plan de vecteur normal .

**Démonstration (exigible au baccalauréat) :**

1. appartient au plan passant par ) et de vecteur normal

équivaut successivement à :

 avec

1. Soit l’ensemble des points tels que et soit le point (en supposant que ). Comme , on déduit que .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| On a |  |  |
| Notons |  |  |

 donc . D’où est le plan passant par et de vecteur normal .

## Intersection de droites et de plans

### Intersection d’une droite et d’un plan

**Propriétés (admises) :** Soit une droite passant par et de vecteur directeur soit un plan de vecteur normal .

* Si et ne sont pas orthogonaux, alors la droite et le plan sont sécants.
* Si et sont orthogonaux :
	+ Si appartient à , la droite est incluse dans le plan ;
	+ Si n’appartient pas à , la droite est strictement parallèle au plan .

**Remarque :** On en déduit que la droite et le plan sont sécants si et seulement si le produit scalaire n’est pas nul.

### Intersection de deux plans

**Propriétés (admises) :** Soient deux plans et de vecteurs normaux et .

* Si et sont colinéaires, alors et sont parallèles.
* Si et ne sont pas colinéaires, alors et sont sécants : leur intersection est une droite.

**Propriétés :** On se place dans un repère orthonormé.

* Les plans et d’équations respectives et sont sécants si et seulement si n’est pas proportionnel à .
* Lorsque et ne sont pas proportionnels, l’ensemble des points de l’espace dont les coordonnées vérifient est une droite.

**Démonstrations :**

* Les vecteurs et sont des vecteurs normaux respectifs des plans et . Ces plans sont donc parallèles si et seulement si et sont colinéaires ce qui équivaut à dire que est proportionnel à .
* Il s’agit de la droite d’intersection des plans d’équations respectives et .
1. On dit que deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit.

*Remarque :* deux droites perpendiculaires sont sécantes, donc coplanaires.

On dit que deux droites sont orthogonales si l'une d'elles est parallèle à une droite perpendiculaire à l'autre.

*Remarque :* deux droites perpendiculaires sont orthogonales. [↑](#footnote-ref-1)
2. On peut dire aussi que les trois vecteurs sont **linéairement indépendants**. [↑](#footnote-ref-2)