

1) a) la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy)
donc on conjecture que la fonction est paire.

b) On voit que sur $[-\pi; \pi]$ (donc sur une largeur de 2π) on a 3 périodes.
Prenons T la période. On a $3T = 2\pi$
donc $T = \frac{2\pi}{3}$

2) Démontrons que f est paire.
Montrons que $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \cos(-3x)$$

$$f(-x) = \cos(3x) \quad \text{car la fonction cosinus est paire}$$

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc f est paire

Démontrons que f a pour période $T = \frac{2\pi}{3}$

Montrons que $f(x + \frac{2\pi}{3}) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x + \frac{2\pi}{3}) = \cos(3(x + \frac{2\pi}{3}))$$

$$f(x + \frac{2\pi}{3}) = \cos(3x + 2\pi)$$

$$f(x + \frac{2\pi}{3}) = \cos(3x)$$

$$f(x + \frac{2\pi}{3}) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.