

$$U_{p+1} = p(p+1) + 2(p+1)$$

$$U_{p+1} = (p+1)(p+2)$$

La proposition P_{p+1} est donc vraie.

- conclusion : la proposition P_n est vraie ie pour tout n de $\mathbb{N}$ $U_n = n(n+1)$.

n° 5 p 22

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des n premiers entiers naturels notée S_n

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Soit P_n la proposition " $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ". Montrons que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$

- initialisation : $S_1 = 1$ $\frac{1(1+1)}{2} = 1$
donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 1$

La proposition P_n est vraie au rang $n = 1$.

• Récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que " P_p soit vraie ie $S_p = \frac{p(p+1)}{2}$ "

Montrons que P_{p+1} est vraie ie $S_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$

En def

$$S_{p+1} = 1 + 2 + \dots + p + (p+1)$$

$$S_{p+1} = S_p + (p+1)$$

$$S_{p+1} = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{2(p+1)}{2} \text{ selon l'hypothèse de récurrence}$$

$$S_{p+1} = \left(\frac{p+1}{2}\right)(p+2)$$

$$S_{p+1} = \frac{1}{2}(p+1)(p+2) \quad \text{CQFD}$$

La proposition P est vraie au rang $p+1$.

• conclusion : la proposition P_n est vraie ie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

n° 7 p 22

Soit P_n la proposition " $2^n \geq n$ "

○ Montrons que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

• initialisation : $2^1 = 2$
et $2 \geq 1$

donc $2^n \geq n$ pour $n = 1$

○ La proposition P_n est vraie au rang $n = 1$.

• hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que P_p soit vraie i.e. $2^p \geq p$

Montrons que P_{p+1} est vraie i.e. $2^{p+1} \geq p+1$

~~alors soit~~ $2^p \geq p$ hypothèse de récurrence
 $2 \cdot 2^p \geq 2p$ or $p \geq 1$
 $2^{p+1} \geq 2p$ $\frac{p}{2p} \geq \frac{p+1}{p+1}$
 $2^{p+1} \geq p+1$

donc $2^{p+1} \geq p+1$

○ La proposition P_{p+1} est vraie.

• conclusion : la proposition P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$
i.e. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^n \geq n$.

n° 42 p 24

Soit (t_n) la suite définie par $\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$

Soit P_n la proposition " $t_n = \frac{n}{n+1}$ ". Montrons que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

• initialisation : $t_0 = 0$ $\frac{0}{0+1} = 0$

donc $t_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n = 0$

La proposition P_n est vraie au rang $n = 0$

• hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que P_p est vraie i.e. $t_p = \frac{p}{p+1}$

Montrons que P_{p+1} est vraie i.e. $\frac{p+1}{p+2} = t_{p+1}$

$$t_{p+1} = t_p + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$t_{p+1} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

selon l'hypothèse de récurrence