

• initialisation : $2^1 = 2$
et $2 \geq 1$

donc $2^n \geq n$ pour $n = 1$

○ La proposition P_n est vraie au rang $n = 1$.

• hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que P_p soit vraie i.e. $2^p \geq p$

Montrons que P_{p+1} est vraie i.e. $2^{p+1} \geq p+1$

~~alors soit~~ $2^p \geq p$ hypothèse de récurrence
 $2 \cdot 2^p \geq 2p$ or $p \geq 1$
 $2^{p+1} \geq 2p$ $\frac{p}{2p} \geq \frac{p+1}{p+1}$
 $2^{p+1} \geq p+1$

donc $2^{p+1} \geq p+1$

○ La proposition P_{p+1} est vraie.

• conclusion : la proposition P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$
i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^n \geq n$

n° 42 p 24

Soit (t_n) la suite définie par $\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$

Soit P_n la proposition " $t_n = \frac{n}{n+1}$ ". Montrons que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

• initialisation : $t_0 = 0$ $\frac{0}{0+1} = 0$

donc $t_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n = 0$

La proposition P_n est vraie au rang $n = 0$

• hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que " P_p est vraie i.e. $t_p = \frac{p}{p+1}$ "

Montrons que P_{p+1} est vraie i.e. $\frac{p+1}{p+2} = t_{p+1}$

$$t_{p+1} = t_p + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$t_{p+1} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

selon l'hypothèse de récurrence

$$t_{p+1} = \frac{p(p+2) + 1}{(p+1)(p+2)}$$

$$t_{p+1} = \frac{p^2 + 2p + 1}{(p+1)(p+2)}$$

$$t_{p+1} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)}$$

$$t_{p+1} = \frac{p+1}{p+2}$$

La proposition P_{p+1} est vraie.

conclusion : la proposition P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$
 ie $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = \frac{n}{n+1}$

n° 43 p 24

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$

1) à l'aide de la calculatrice

$u_1 = 1$	$u_6 = 36$
$u_2 = 4$	$u_7 = 49$
$u_3 = 9$	$u_8 = 64$
$u_4 = 16$	$u_9 = 81$
$u_5 = 25$	$u_{10} = 100$

2) a) on peut conjecturer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = n^2$

b) Soit P_n la proposition " $u_n = n^2$ ". Montrons que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

initialisation : $u_1 = 1 \quad 1^2 = 1$
 donc $u_n = n^2$

La proposition P_n est vraie au rang $n = 1$.

Récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que P_p est vraie ie $u_p = p^2$.

Montrons que P_{p+1} est vraie ie $u_{p+1} = (p+1)^2$

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= u_p + 2p + 1 \\ u_{p+1} &= p^2 + 2p + 1 \quad \text{selon l'hypothèse de récurrence} \\ u_{p+1} &= (p+1)^2 \end{aligned}$$

La proposition P_{p+1} est vraie

conclusion : la proposition P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$
 ie $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n^2$