

## Activité 1 p 10 : une suite de plus

1. a)  $u_1 = 10 \text{ m}$

$$u_2 = 1 + \frac{10}{2}$$

$$u_2 = 1 + 5$$
$$u_2 = 6 \text{ m}$$

$$u_3 = 1 + \frac{6}{2}$$

$$u_3 = 1 + 3$$
$$u_3 = 4 \text{ m}$$

b)  $u_4 = 1 + \frac{4}{2}$

$$u_4 = 1 + 2$$
$$u_4 = 3 \text{ m}$$

donc  $u_4 > 2$

$$u_5 = 1 + \frac{3}{2}$$

$$u_5 = 1 + 1,5$$
$$u_5 = 2,5 \text{ m}$$

$$u_6 = 1 + \frac{2,5}{2}$$

$$u_6 = 1 + 1,25$$
$$u_6 = 2,25 \text{ m}$$

donc  $u_6 > 2$

2. a)  $\exists p \in \mathbb{N}^*$ . Montrons que si  $u_p > 2$ , alors  $u_{p+1} > 2$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$

$$u_p > 2$$

$$u_p > 1$$

$$\frac{u_p}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\text{car } u_{p+1} = 1 + \frac{u_p}{2} > 2$$

donc  $u_{p+1} > 2$

b) Par étapes successives, on peut conjecturer que l'inégalité  $u_n > 2$  est vraie.

En effet  $u_6 > 2$  donc  $u_7 > 2$ , donc  $u_8 > 2$  ....

## I. Raisonnement par récurrence

n° 3 p 22

Soit  $P_n$  la proposition " $u_n = n(n+1)$ ". Montrons que  $P_n$  est vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

avec  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \end{cases}$

. initialisation :  $u_0 = 0$   $0(0+1) = 0$   
donc  $u_n = n(n+1)$  pour  $n = 0$

La proposition  $P_n$  est vraie au rang  $n = 0$

. hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel tel que " $P_p$  soit vraie ie  $p(p+1) = u_p$ "

Montrons que  $P_{p+1}$  est vraie ie  $(p+1)(p+2) = u_{p+1}$ .

On déf :  $u_{p+1} = u_p + 2p + 2$

$u_{p+1} = p(p+1) + 2p + 2$  selon l'hypothèse de récurrence

$$U_{p+1} = p(p+1) + 2(p+1)$$

$$U_{p+1} = (p+1)(p+2)$$

La proposition  $P_{p+1}$  est donc vraie.

- conclusion : la proposition  $P_n$  est vraie ie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $U_n = n(n+1)$ .

n° 5 p 22

Soit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la somme des  $n$  premiers entiers naturels notée  $S_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Soit  $P_n$  la proposition " $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ". Montrons que  $P_n$  est vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$

- initialisation :  $S_1 = 1$   $\frac{1(1+1)}{2} = 1$   
donc  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$  pour  $n = 1$

La proposition  $P_n$  est vraie au rang  $n = 1$ .

• Récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel  $p$  tel que " $P_p$  soit vraie ie  $S_p = \frac{p(p+1)}{2}$ "

Montrons que  $P_{p+1}$  est vraie ie  $S_{p+1} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$

En def

$$S_{p+1} = 1 + 2 + \dots + p + (p+1)$$

$$S_{p+1} = S_p + (p+1)$$

$$S_{p+1} = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{2(p+1)}{2} \text{ selon l'hypothèse de récurrence}$$

$$S_{p+1} = \left(\frac{p+1}{2}\right)(p+2)$$

$$S_{p+1} = \frac{1}{2}(p+1)(p+2) \quad \text{CQFD}$$

La proposition  $P$  est vraie au rang  $p+1$ .

• conclusion : la proposition  $P_n$  est vraie ie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$   $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

n° 7 p 22

Soit  $P_n$  la proposition " $2^n \geq n$ "

○ Montrons que  $P_n$  est vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .